Дискретная математика

Глава 7. Метод производящих функций

А. В. Пастор

03.04.2026

Производящие функции

- Пусть $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ — произвольная последовательность чисел.
- *Производящей функцией* последовательности (a_k) называется выражение

$$A(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

- Например, пусть $a_k = C_n^k$ (где $n \in \mathbb{N}$ — фиксировано). Тогда

$$A(x) = \sum_{k\geq 0} C_n^k x^k = (1+x)^n.$$

- То есть $(1+x)^n$ — производящая функция для последовательности C_n^k.
- Еще одним примером построения производящей функции является доказанное в главе 6 равенство

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

- То есть $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ — это производящая функция для чисел Стирлинга первого рода (при фиксированном n).

Производящие функции: примеры

- При помощи алгебраических преобразований таких выражений часто удается доказывать те или иные свойства комбинаторных величин.
- В качестве примера рассмотрим формулу, которую мы доказывали на практике: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Доказательство.

- $\sum_{k\geq 0} C_{2n}^k x^k = (1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{\ell\geq 0} C_n^\ell x^\ell\right)\left(\sum_{\ell\geq 0} C_n^\ell x^\ell\right) =$
  $= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\ell=0}^{k} C_n^\ell C_n^{k-\ell}\right)x^k$.
- Приравнивая коэффициенты при $k = n$, получаем
  $C_{2n}^n = \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell C_n^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} (C_n^\ell)^2$. $\square$

- В рассмотренных выше примерах, последовательность была конечной (точнее, включала конечное число ненулевых членов). Поэтому производящая функция оказывалась многочленом.
- Несколько сложнее обстоит дело с бесконечными последовательностями. Для них нужно рассматривать степенные ряды.

Степенные ряды с точки зрения математического анализа

Пусть $A(x) = \sum_{k \ge 0} a_k x^k$ — степенной ряд. Мы можем смотреть на него как на функцию от x. Она будет определена при всех $x \in \mathbb{R}$, для которых этот ряд сходится. Из матанализа известны следующие свойства таких рядов.

- Существует такая константа $R \in [0, +\infty]$, что при $|x| < R$ ряд $A(x)$ сходится абсолютно и при $|x| > R$ ряд $A(x)$ расходится.
  - Такая константа R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.
  - Если брать $x \in \mathbb{C}$, то ряд $A(x)$ будет абсолютно сходиться внутри *круга сходимости* (т. е. круга радиуса R с центром в нуле) и расходиться вне этого круга.
  - При $|x| = R$ ряд $A(x)$ может как сходиться, так и расходится.
- При любом $r < R$ ряд $A(x)$ равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, функция $A(x)$ непрерывна и дифференцируема на всем интервале $(-R, R)$.
- Ряд $A(x)$ можно *почленно дифференцировать*.
  - То есть $A'(x) = \sum_{k \ge 1} k a_k x^{k-1}$. При этом, ряды для $A(x)$ и $A'(x)$ имеют одинаковые радиусы сходимости.

Степенные ряды с точки зрения математического анализа

- Аналогично, ряд $A(x)$ можно *почленно интегрировать*.
  - То есть $\int_0^x A(t)\,dt = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.
  - При этом, ряды для $A(x)$ и её первообразной функции имеют одинаковые радиусы сходимости.
- Если значения функций $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ совпадают всюду в некоторой окрестности нуля, то есть, если

$$\exists \delta > 0\, \forall x \in [0,\delta) \left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k = \sum_{k\geq 0} b_k x^k\right),$$

то $\forall i\; a_i = b_i$.
- Таким образом, если степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то последовательность однозначно задается своей производящей функцией.
- Однако бывают и степенные ряды с нулевым радиусом сходимости. Таков, например, ряд $\sum_{k\geq 0} k! x^k$. Такие ряды сходятся только при $x = 0$ и говорить о задаваемой ими функции бессмысленно.

Формальные степенные ряды

Другой подход заключается в том, что выражение $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ можно рассматривать как *формальный степенной ряд*.

- То есть мы смотрим на это выражение как на формальную запись.

Мы не будем пытаться подставлять какие-либо числа вместо x и выяснять, сходится ли получившийся ряд и к какому именно пределу он сходится.

  - Единственным исключением здесь является случай $x = 0$: мы будем формально полагать, что $A(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_0$.

- Строго говоря, формальный степенной ряд не является функцией.
- Формальный степенной ряд однозначно задается последовательностью своих коэффициентов.
  - Можно считать, что формальный степенной ряд $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ — это и есть последовательность $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.
  - Переменная x и её степени пишутся здесь исключительно для удобства.
  - В итоге получится определение кольца формальных степенных рядов, очень похожее на определение кольца многочленов.

Кольцо формальных степенных рядов

Определение

Пусть K — коммутативное кольцо.

- *Кольцо формальных степенных рядов* над K состоит из бесконечных последовательностей $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ с коэффициентами из K.
- Сложение и умножение в кольце формальных степенных рядов осуществляется по следующим формулам.

Пусть $A = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$ и $B = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$. Тогда

- $A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots)$;
- $A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} (c_0, c_1, \dots, c_k, \dots)$, где $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

- Кольцо формальных степенных рядов над K обозначается $K[[x]]$, где x — *формальная переменная*.
- Для элемента $A = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \in K[[x]]$ мы будем использовать обозначения $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$ или $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$.
  - Также мы будем использовать обозначение $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} a_0$.

Кольцо формальных степенных рядов: замечания

Замечание

• Очевидно, что в приведенных выше обозначениях выполняются равенства $(A+B)(0)=A(0)+B(0)$ и $(AB)(0)=A(0)B(0)$.

• Определение кольца формальных степенных рядов очень похоже на определение кольца многочленов. Единственным отличием является то, что в определении кольца формальных степенных рядов отсутствует требование конечности числа ненулевых коэффициентов.

- То есть $K[x] \subset K[[x]]$ и при этом сложение и умножение в этих кольцах осуществляются по одним и тем же формулам. Это означает, что кольцо $K[x]$ является *подкольцом* кольца $K[[x]]$. (Но для того, чтобы говорить об этом строго, нам еще нужно доказать то, что $K[[x]]$ — кольцо.)

• В основном, мы будем рассматривать кольцо $\mathbb{R}[[x]]$. Элементы этого кольца можно рассматривать как степенные ряды в $\mathbb{R}$ и, в частности, говорить об их сходимости при тех или иных значениях x. Можно доказать, что если оба ряда $A(x)$ и $B(x)$ абсолютно сходятся при некотором x, то определенные выше ряды для $(A+B)(x)$ и $(AB)(x)$ также сходятся при том же x и их пределы равны $A(x)+B(x)$ и $A(x)B(x)$ соответственно.

Кольцо формальных степенных рядов: доказательство

Теорема

Пусть K — коммутативное кольцо. Тогда $K[[x]]$ — тоже коммутативное кольцо. Если при этом K — кольцо с единицей, то $K[[x]]$ — тоже с единицей.

Доказательство. В целом аналогично доказательству для $K[x]$.

• Поскольку сложение формальных степенных рядов осуществляется покоэффициентно, все свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, существование нейтрального и обратного элементов) непосредственно следуют из аналогичных свойств в кольце K.

• Коммутативность умножения. Пусть $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$, $(AB)(x) = \sum_{k\geq 0} d_k x^k$ и $(BA)(x) = \sum_{k\geq 0} d'_k x^k$.
Тогда $d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j} = d'_k$.

• Дистрибутивность. Пусть $C(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$, $(AC)(x) = \sum_{k\geq 0} e_k x^k$ и $(A(B+C))(x) = \sum_{k\geq 0} f_k x^k$.
Тогда $f_k = \sum_{i=0}^{k} a_i(b_{k-i} + c_{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i c_{k-i} = d_k + e_k$.

Кольцо формальных степенных рядов: доказательство

- Ассоциативность умножения. Пусть $((AB)C)(x) = \sum_{k\geq 0} g_k x^k$.
- Тогда

$$g_s = \sum_{i=0}^{s} d_i c_{s-i} = \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) c_{s-i} = \sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k.$$

Аналогично доказывается, что коэффициент при x^s ряда $(A(BC))$ равен тому же числу. Следовательно, $(A(BC)) = ((AB)C)$.

- Единичный элемент. Если существует $1 \in K$, то легко видеть, что единичным элементом в $K[[x]]$ будет формальный степенной ряд, соответствующий последовательности $(1, 0, 0, \ldots)$. $\square$

- Итак, формальные степенные ряды можно складывать, вычитать и умножать. А можно ли их делить?
- Можно. Но не всегда.

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$

- Напомним, что элемент $a \in K$ (где K — кольцо с единицей) называется *обратимым*, если существует такой элемент $b \in K$, что $ab = ba = 1$. В этом случае, элемент b называется *обратным* к элементу a и обозначается a^{-1}.
- В курсе алгебры доказывалось, что для любого элемента кольца существует не более одного обратного.
- Множество всех обратимых элементов кольца K обозначается через K^*.

Теорема

Формальный степенной ряд $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ является обратимым элементом кольца $K[[x]]$ если и только если $a_0 \in K^*$.

Доказательство. "$\Rightarrow$": Пусть $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ — обратный элемент к $A(x)$.

- Тогда $a_0 b_0 = 1$, следовательно, $a_0 \in K^*$.

"$\Leftarrow$": Пусть $a_0 \in K^*$.

- Будем последовательно вычислять коэффициенты b_i формального степенного ряда $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$, обратного к $A(x)$.

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$

- Должны выполняться соотношения
  - $a_0 b_0 = 1$;
  - $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0$, при $k > 0$.
- Тогда положим $b_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{-1}$;
- при $k > 0$ вычисляем b_k по формуле $b_k = a_0^{-1}(-\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i})$. $\square$

Следствие

Пусть K — поле. Тогда формальный степенной ряд $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ является обратимым элементом кольца $K[[x]]$ если и только если $a_0 \neq 0$.

Замечание

- Простейшим примером обратимого элемента в $K[[x]]$ является ряд $1 - x$.
- Легко видеть, что $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$.
  - Ниже мы докажем немного более общую формулу.
- То есть формула $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, известная как сумма геометрической прогрессии, является верным равенством и для формальных степенных рядов.

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$: примеры

Примеры

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей и $\lambda \in K$. Тогда

1) В кольце $K[[x]]$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{1-\lambda x} = \sum_{k \geq 0} \lambda^k x^k. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $(1-\lambda x)\sum_{k\geq 0}\lambda^k x^k = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

- Тогда по определению имеем
  - $c_0 = 1 \cdot \lambda^0 = 1$;
  - $c_k = 1 \cdot \lambda^k + (-\lambda) \cdot \lambda^{k-1} = 0$, при $k > 0$.
- Следовательно, $(1-\lambda x)\sum_{k\geq 0}\lambda^k x^k = 1$. $\square$

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$: примеры

2) Для любого $n \in \mathbb{N}$ кольце $K[[x]]$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^n} = \sum_{k\geq 0} C_{n+k-1}^k \lambda^k x^k. \qquad (2)$$

Доказательство. Индукция по n.

База $(n=1)$: была доказана выше.

Переход $(n-1 \to n)$: пусть $(1-\lambda x)\sum_{k\geq 0} C_{n+k-1}^k \lambda^k x^k = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

- Тогда по определению имеем
  - $c_0 = 1 \cdot C_{n-1}^0 \lambda^0 = C_{(n-1)-1}^0 \lambda^0$;
  - $c_k = 1 \cdot C_{n+k-1}^k \lambda^k + (-\lambda) \cdot C_{n+(k-1)-1}^{k-1} \lambda^{k-1} =$
    $= (C_{n+k-1}^k - C_{n+k-2}^{k-1})\lambda^k = C_{(n-1)+k-1}^k \lambda^k$, при $k > 0$.
- Следовательно, $(1-\lambda x)\sum_{k\geq 0} C_{n+k-1}^k \lambda^k x^k = \sum_{k\geq 0} C_{(n-1)+k-1}^k \lambda^k x^k$.
- Но тогда, применяя индукционное предположение, имеем

$(1-\lambda x)^n \sum_{k\geq 0} C_{n+k-1}^k \lambda^k x^k = (1-\lambda x)^{n-1} \sum_{k\geq 0} C_{(n-1)+k-1}^k \lambda^k x^k = 1.$ $\square$

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$: примеры и замечания

Замечание

- Из матанализа известно, что функция $(1+x)^\alpha$ раскладывается в ряд Тейлора следующим образом:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k, \tag{3}$$

где $\binom{\alpha}{k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

  - При этом, ряд в правой части сходится при $|x| < 1$.

- По сути, формула (2) является формальным аналогом формула (3) для случая $\alpha = -n$.
  - В случае $\alpha = -n$ формула (2) получается из формулы (3) заменой x на $-\lambda x$.

- Чуть позже мы увидим, что формула (3) имеет формальные аналоги и для нецелых α.

Производящая функция для чисел Фибоначчи

- Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи задается соотношениями $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, при $n > 1$.

Теорема

Производящая функция для чисел Фибоначчи имеет вид $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \sum_{k\geq 0} F_k x^k$.

- Тогда $xF(x) = \sum\limits_{k\geq 0} F_k x^{k+1} = \sum\limits_{k\geq 1} F_{k-1} x^k$.
- Аналогично, $x^2F(x) = \sum\limits_{k\geq 0} F_k x^{k+2} = \sum\limits_{k\geq 2} F_{k-2} x^k$.
- Тогда

$$xF(x) + x^2F(x) = F_0 \cdot x + \sum_{k\geq 2} F_{k-1}x^k + \sum_{k\geq 2} F_{k-2}x^k =$$
$$= \sum_{k\geq 2} (F_{k-1} + F_{k-2})x^k = \sum_{k\geq 2} F_k x^k = F(x) - x.$$

- Следовательно, $x = F(x) - xF(x) - x^2F(x) = (1-x-x^2)F(x)$,
- откуда $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$. □

Формула для чисел Фибоначчи

Следствие (Формула Бине)

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$$

Доказательство.

- Заметим, что числа $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ являются корнями квадратного уравнения $t^2 - t - 1 = 0$. Следовательно, $t^2 - t - 1 = (t-\varphi)(t-\varphi')$.
- Подставив $t = \frac{1}{x}$ и домножив на x^2 получим
$1 - x - x^2 = x^2(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1) = x^2(\frac{1}{x} - \varphi)(\frac{1}{x} - \varphi') = (1-\varphi x)(1-\varphi' x)$.
- Тогда $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\varphi-\varphi'}\left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\varphi' x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\varphi' x}\right) =$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k\geq 0}(\varphi x)^k - \sum_{k\geq 0}(\varphi' x)^k\right) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \varphi'^k)x^k.$$
- Таким образом, $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$. □

Линейные рекуррентные соотношения

Определение

Пусть K — поле и $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что последовательность (a_k) элементов поля K удовлетворяет *линейному рекуррентному соотношению порядка n*, если существуют такие $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in K$, что $\beta_0 \neq 0$ и для любого $k \geq 0$ выполнено равенство

$$a_{n+k} = \beta_{n-1}a_{n+k-1} + \beta_{n-2}a_{n+k-2} + \ldots + \beta_0 a_k. \tag{4}$$

Замечание

- Очевидно, что последовательность, удовлетворяющая линейному рекуррентному соотношению порядка n, однозначно задается своими первыми n членами. То есть, значения $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ и соотношение (4) однозначно определяют последовательность (a_k).
- Оказывается, что производящая функция любой такой последовательности дробно-рациональна.

Линейные рекуррентные соотношения и производящие функции

Теорема

1) *Производящая функция любой последовательности, удовлетворяющей соотношению* (4), *имеет вид* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x) \in K[x]$, $\deg P < n$ *и* $Q(x) = 1 - \beta_{n-1}x - \beta_{n-2}x^2 - \ldots - \beta_0 x^n$.

2) *Любая дробь указанного выше вида является производящей функцией последовательности, удовлетворяющей соотношению* (4).

Доказательство. Сначала заметим, что многочлен $Q(x)$ является обратимым элементом кольца $K[[x]]$. Поэтому частное $\frac{P(x)}{Q(x)}$ корректно определено в этом кольце.

- Пусть (a_k) — произвольная последовательность элементов поля K.
  - Рассмотрим её производящую функцию $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ и произведение $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x)A(x)$.
  - Нам нужно доказать, что $P(x)$ является многочленом степени менее n в том и только том случае, когда последовательность (a_k) удовлетворяет соотношению (4).

Линейные рекуррентные соотношения и производящие функции

- Пусть $P(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$. Тогда
$p_{n+k} = a_{n+k} - \beta_{n-1}a_{n+k-1} - \beta_{n-2}a_{n+k-2} - \ldots - \beta_0 a_k$.
- Но это означает, что $p_{n+k} = 0$ при всех $k \geq 0$, в том и только том случае, когда последовательность (a_k) удовлетворяет соотношению (4). $\square$

Определение

Многочлен $\chi(x) = x^n - \beta_{n-1}x^{n-1} - \beta_{n-2}x^{n-2} - \ldots - \beta_0$ называется *характеристическим многочленом* рекуррентного соотношения(4).

Замечание

- Многочлены $\chi(x)$ и $Q(x)$ связаны соотношением $\chi(x) = x^n Q(\frac{1}{x})$.
- В частности, λ — корень $\chi(x)$, если и только если $\frac{1}{\lambda}$ — корень $Q(x)$.
  - Отметим, что 0 не может быть корнем ни одного из этих двух многочленов.
- Более того, корни λ и $\frac{1}{\lambda}$ этих многочленов имеют одинаковую кратность.
  - Действительно, пусть $\chi(x) = (x-\lambda)^m f(x)$, где $f(\lambda) \neq 0$. Тогда $Q(x) = (1-\lambda x)^m g(x)$, где $g(x) = x^{n-m} f(\frac{1}{x})$, поэтому $g(\frac{1}{\lambda}) \neq 0$.

Линейные рекуррентные соотношения: явная формула

Следствие

Пусть $\chi(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_s)^{m_s}$. *Тогда любая последовательность, удовлетворяющая соотношению* (4), *задается явной формулой следующего вида:*

$$a_k = f_1(k)\lambda_1^k + \ldots + f_s(k)\lambda_s^k, \tag{5}$$

где $f_1, \ldots, f_s \in K[x]$ *и* $\forall i\,(\deg f_i < m_i)$.

Доказательство.

- Мы знаем, что производящая функция последовательности (a_n) имеет вид $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $\deg P < n$ и $Q(x) = (1 - \lambda_1 x)^{m_1} \ldots (1 - \lambda_s x)^{m_s}$.
- Заметим, что $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — это правильная дробь. Разложим её в сумму простейших:

$$A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(1 - \lambda_i x)^j}, \quad \text{где } c_{ij} \in K. \tag{6}$$

Линейные рекуррентные соотношения: явная формула

- Раскрывая каждое слагаемое в (6) по формуле (2) и приравнивая коэффициенты при x^k получим

$$a_k = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} C_{k+j-1}^{k} \right) \lambda_i^k .$$

- Осталось заметить, что $C_{k+j-1}^{k} = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+j-1)}{(j-1)!}$ — многочлен степени $j-1$ от переменной k. Поэтому $f_i(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} C_{k+j-1}^{k}$ — многочлен степени меньшей m_i. □

Замечание

В курсе алгебры было доказано, что любая последовательность, заданная формулой (5), удовлетворяет соотношению (4).

Производящая функция для чисел Каталана

Теорема

Производящая функция для чисел Каталана имеет вид $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Доказательство. Пусть $C(x) = \sum\limits_{k\geq 0} c_k x^k$.

- Отметим, что $c_k \leq C_{2k}^k \leq 4^k$ при всех $k \geq 0$. Поэтому ряд для $C(x)$ сходится при $|x| < \frac{1}{4}$ и дает в пределе непрерывную функцию на $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
- Тогда $C^2(x) = \left(\sum\limits_{k\geq 0} c_k x^k\right)^2 = \sum\limits_{k\geq 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{k} c_i c_{k-i}\right)x^k = \sum\limits_{k\geq 0} c_{k+1}x^k = \dfrac{C(x)-1}{x}$.
- Преобразовав, получим
  - $4x^2C^2(x) = 4xC(x) - 4x$;
  - $(2xC(x)-1)^2 = 1-4x$;
  - $2xC(x) - 1 = \pm\sqrt{1-4x}$;
  - подставив $x = 0$ убеждаемся, что в правой части должен стоять минус.
- Таким образом, $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. $\square$

Производящая функция для чисел Каталана

Следствие

$c_k = \dfrac{C_{2k}^k}{k+1}.$

Доказательство. Разложим $\sqrt{1-4x}$ по формуле Тейлора.

- $\sqrt{1-4x} = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{1/2}{k}(-4x)^k$, где $\binom{a}{k} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$.
- $$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = -\frac{1}{2x}\sum_{k\geq 1}\binom{1/2}{k}(-4x)^k = \\ = -\frac{1}{2x}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k+1}(-4x)^{k+1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{1/2}{k+1}2^{2k+1}x^k.$$
- $$c_k = (-1)^k\binom{1/2}{k+1}2^{2k+1} = \frac{(-1)^k(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2k-1}{2})\cdot 2^{2k+1}}{(k+1)!} = \\ = \frac{(2k-1)!!\cdot 2^k}{(k+1)!} = \frac{(2k-1)!!\cdot k!\cdot 2^k}{k!(k+1)!} = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = \frac{C_{2k}^k}{k+1}.$$

$\square$

Композиция формальных степенных рядов

- Пусть $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ — формальные степенные ряды.
- Попытаемся подставить ряд $B(x)$ в $A(x)$. То есть будем пытаться определить *композицию* $A(B(x))$ этих двух рядов.
- Всегда ли такая композиция корректно определена? *Не всегда.*
- Попробуем определить $A(B(x)) = \sum_{k\geq 0} a_k B^k(x)$.
  - Каждое слагаемое $a_k B^k(x)$ является формальным степенным рядом.
  - Проблема в том, что получается бесконечная сумма формальных степенных рядов.
  - То есть, вычисляя коэффициент при x^n нужно будет сложить бесконечно много слагаемых.
  - Однако, если $b_0 = 0$, то ненулевые коэффициенты при x^n будут только в слагаемых $a_k B^k(x)$ при $k \leq n$. В этом случае коэффициент при x^n определяется как сумма лишь конечного числа слагаемых и мы можем формально определить $A(B(x))$ как формальный степенной ряд именно с такими коэффициентами.

Предел последовательности формальных степенных рядов

Сделаем то же самое более формально.

Определение

- Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, в котором нет делителей нуля, и $A_n(x) = \sum_{k\geq 0} a_{nk}x^k$ — последовательность формальных степенных рядов из $K[[x]]$.
- Формальный степенной ряд $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ называется *пределом* последовательности (A_n), если $\forall k \geq 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, (a_{nk} = b_k)$.
- Обозначения: $A_n(x) \to B(x)$ или $B(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$.

Замечание

Другими словами, для любого $k \geq 0$ последовательность (a_{nk}) коэффициентов при x^k стабилизируется: начиная с некоторого места все её члены становятся равными b_k.

Предел последовательности формальных степенных рядов: свойства

Утверждение 1

Если $A_n(x) \to B(x)$ *и* $A_n(x) \to C(x)$, *то* $B(x) = C(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $k \geq 0$.

- По определению, найдутся такие $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N_1\, (a_{nk} = b_k)$ и $\forall n \geq N_2\, (a_{nk} = c_k)$.
- Тогда при $n = \max(N_1, N_2)$ имеем $b_k = a_{nk} = c_k$. □

Утверждение 2

Пусть $A_n(x) \to B(x)$ *и* $C_n(x) \to D(x)$. *Тогда*

1. $(A_n + C_n)(x) \to (B + D)(x)$;
2. $(A_n C_n)(x) \to (BD)(x)$.

Доказательство. Пусть $k \geq 0$.

- Выберем N так, чтобы $\forall i \leq k\, \forall n \geq N\, (a_{ni} = b_i \,\&\, c_{ni} = d_i)$.
- Тогда при $n \geq N$ имеем $a_{nk} + c_{nk} = b_k + d_k$ и $\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ni} c_{n,k-i} = \sum\limits_{i=0}^{k} b_i d_{k-i}$. □

Дискретное нормирование в кольце $K[[x]]$

Определение

Пусть $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ — формальный степенной ряд.

- Назовем *нормой* ряда $A(x)$ величину $\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\}$.
- В случае $A(x) = 0$ положим $\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$.

Утверждение 3

Определенная выше функция $\nu\colon K[[x]] \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, обладает следующими свойствами:

1. $\nu(A) = \infty \iff A = 0$;
2. $\nu(AB) = \nu(A) + \nu(B)$;
3. $\nu(A + B) \geq \min\{\nu(A), \nu(B)\}$.

Доказательство. Свойство 1. непосредственно следует из определения.

- Пусть $\nu(A) = m$ и $\nu(B) = n$.
- В случае, если $A = 0$ или $B = 0$, свойства 2. и 3. очевидно выполнены.

Поэтому далее мы будем считать, что $m, n < \infty$.

Дискретное нормирование в кольце $K[[x]]$

2. Пусть $(AB)(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$, где $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

- Заметим, что $a_i b_{k-i} = 0$ как при $i < m$, так и при $i > k - n$.
- Следовательно, $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$ и $c_k = 0$ при $k < m + n$.
- А это и означает, что $\nu(AB) = m + n$.

3. При $k < \min\{m, n\}$ очевидно, что $a_k + b_k = 0$.

- Следовательно, $\nu(A + B) \geq \min\{m, n\}$. $\square$

Следствие

Если в кольце K нет делителей нуля, то в $K[[x]]$ также нет делителей нуля.

Замечание

- Функция с такими свойствами называется *дискретным нормированием* в кольце $K[[x]]$.
- Функция $\nu(A)$ ведет себя так же, как и степень многочлена. В некоторых книгах её называют *степенью* формального степенного ряда и обозначают $\deg(A)$. Но мы так делать не будем во избежание путаницы с обычной степенью многочлена. Все-таки формально это разные функции.

Дискретное нормирование и пределы в кольце $K[[x]]$

Утверждение 4

Последовательность формальных степенных рядов $A_n(x)$ *имеет предел, если и только если* $\lim\limits_{i\to\infty} \nu(A_{i+1} - A_i) = \infty$.

Доказательство. "$\Rightarrow$" Пусть $A_n(x) \to B(x)$. Рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}$.

- Тогда найдется такое $N_k \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N_k \, \forall j \leq k \, (a_{nj} = b_j)$.
- Следовательно, при $i \geq N_k$ имеем $\forall j \leq k \, (a_{i+1,j} - a_{ij} = 0)$, то есть $\nu(A_{i+1} - A_i) > k$.

"$\Leftarrow$" Пусть $\lim\limits_{i\to\infty} \nu(A_{i+1} - A_i) = \infty$. Рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}_0$.

- Тогда найдется такое $N_k \in \mathbb{N}$, что $\forall i \geq N_k \, (\nu(A_{i+1} - A_i) > k)$.
- Следовательно, при $\forall i \geq N_k \, (a_{ik} = a_{N_k k})$.
- Тогда, обозначив $b_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{N_k k}$, получим, что $A_n(x) \to \sum_{k\geq 0} b_k x^k$. $\square$

Замечание о расстояниях между формальными степенными рядами

Замечание

• Фактически, мы считаем, что два формальных степенных ряда тем ближе, чем больше норма их разности. Другими словами, ряды тем ближе, чем позже наступает первое различие в их коэффициентах.

• Формально это можно задать введя следующую *функцию расстояния* в кольце $K[[x]]$:

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-\nu(A-B)}.$$

• Тогда $A_n(x) \to B(x)$ если и только если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(A_n, B) = 0$.

• Можно проверить, что для заданной таким образом функции расстояния выполнены основные свойства обычного расстояния между точками.
В частности, выполнено неравенство треугольника:
$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$.

• Такая функция расстояния задает на $K[[x]]$ структуру *метрического пространства*. Но подробно о метрических пространствах мы говорить не будем.

Бесконечные суммы и произведения формальных степенных рядов

Определение

- Пусть $A_i(x)$ — последовательность формальных степенных рядов.
- Тогда обозначим
  - $\sum\limits_{i\geq 0} A_i(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} A_i(x)$;
  - $\prod\limits_{i\geq 0} A_i(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=0}^{n} A_i(x)$.
- Будем говорить, что бесконечная сумма или бесконечное произведение *сходится*, если указанный в определении предел существует.

Замечание

- Тем самым, мы можем рассматривать формальный степенной ряд $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ как бесконечную сумму своих одночленов $a_k x^k$.
- Для простоты, говоря о бесконечных произведениях, мы далее будем ограничиваться случаем, когда у всех множителей свободные члены равны 1.

Сходимость бесконечных сумм и произведений

Теорема

1. $\sum_{i\geq 0} A_i(x)$ *сходится, если и только если* $\lim\limits_{i\to\infty} \nu(A_i) = \infty$;
2. $\prod_{i\geq 0}(1+B_i(x))$, *где* $\forall i\, \nu(B_i) > 0$, *сходится, если и только если* $\lim\limits_{i\to\infty} \nu(B_i) = \infty$.

Доказательство.

1. По утверждению 4 сходимость суммы равносильна тому, что
$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\sum_{i=0}^{n+1} A_i(x) - \sum_{i=0}^{n} A_i(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \infty.$$
2. Аналогично, сходимость произведения равносильна тому, что
$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\prod_{i=0}^{n+1}(1+B_i(x)) - \prod_{i=0}^{n}(1+B_i(x))\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \nu\left(\prod_{i=0}^{n}(1+B_i(x))B_{n+1}(x)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \nu(1+B_i(x)) + \nu(B_{n+1}(x))\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \infty. \qquad \square$$

Еще о композиции формальных степенных рядов

Теперь мы можем дать формальное определение композиции формальных степенных рядов. Пусть $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ — формальные степенные ряды.

Определение

- $A(B(x)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k\geq 0} a_k B^k(x)$ — *композиция* рядов A и B.
- Композиция определена, если и только если указанная выше бесконечная сумма сходится.

Поймем, при каких условиях $A(B(x))$ определена. Есть два случая.

1° Тривиальный случай: если $A(x)$ — многочлен (т. е. начиная с некоторого места все $a_i = 0$). Тогда в бесконечной сумме лишь конечное число ненулевых слагаемых. Очевидно, что тогда она сходится.

2° Если $\nu(B) > 0$ (т. е. у $B(x)$ нулевой свободный член), то $\nu(a_k B^k(x)) = \nu(a_k) + k\nu(B(x)) \geq k\nu(B(x)) \to +\infty$ и бесконечная сумма также сходится.

- Докажем, что в остальных случаях композиция не определена.

Еще о композиции формальных степенных рядов

Теорема

Композиция $A(B(x))$ определена тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух утверждений.

1° $A(x)$ — *многочлен (т. е. начиная с некоторого места все* $a_k = 0$*);*

2° $\nu(B) > 0$.

Доказательство. "$\Leftarrow$": доказано выше.
"$\Rightarrow$": Пусть $A(B(x))$ определена и при этом $\nu(B) = 0$.

- Тогда, $\nu(a_k B^k(x)) = \nu(a_k) + k\nu(B(x)) = \nu(a_k) \to \infty$.
- Но тогда начиная с некоторого места все $a_k = 0$. □

Примеры

1. Подставим в равенство $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ряд x^n.
   Получим равенство $\frac{1}{1-x^n} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$.
2. Введем обозначение $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$. Тогда выражение e^{e^x-1} определено как формальный степенной ряд. А выражение e^{x+1} — не определено!

Производящая функция числа разбиений

Теорема

$\sum_{n\ge 0} p(n)x^n = \prod_{k\ge 1}\frac{1}{1-x^k}$.

Доказательство.

- $\prod_{k\ge 1}\frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)\dots$.
- Заметим, что коэффициент при x^n получается при перемножении первых n скобок этого бесконечного произведения.
- Для того, чтобы в произведении $\prod_{k=1}^{n}(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots)$ получить слагаемое x^n, нам нужно перемножить слагаемые вида $x^{t_k k}$ из каждой скобки (где $t_k\in\mathbb{N}_0$).
- То есть коэффициент при x^n равен числу решений уравнения $t_1+2t_2+3t_3+\dots+nt_n=n$ в целых неотрицательных числах, а оно равно $p(n)$. $\square$
- Многие утверждения о количествах разбиений можно доказать при помощи производящих функций.
- В качестве примера, рассмотрим одну из задач из серии про разбиения.

Производящая функция числа разбиений

Утверждение

Количество представлений натурального числа n в виде суммы различных натуральных слагаемых равно количеству его представлений в виде суммы нечетных, не обязательно различных слагаемых.

Доказательство. Аналогично доказанному выше можно получить, что

- производящая функция для числа разбиений на нечетные слагаемые равна $\prod_{k \not\vdots 2} \frac{1}{1-x^k}$;
- производящая функция для числа разбиений на различные слагаемые равна $\prod_{k\geq 1}(1+x^k)$.
- Докажем, что они равны. Для этого заметим, что $\frac{1}{1-x^k} = \prod_{\ell\geq 0}(1+x^{k2^\ell})$.
  - Действительно, докажем, что $(1-x^k)\prod_{\ell=0}^{m-1}(1+x^{k2^\ell}) = 1-x^{k2^m}$.
  - $\underline{m=1}$: $(1-x^k)(1+x^k) = 1-x^{2k}$;
  - $\underline{m \to m+1}$: $(1-x^k)\prod\limits_{\ell=0}^{m}(1+x^{k2^\ell}) = (1-x^{k2^m})(1+x^{k2^m}) = 1-x^{k2^{m+1}}$.
- Перемножив полученные равенства по всем $k \not\vdots 2$, получим требуемое. $\square$

Формальная производная

Определение

- Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ — формальный степенной ряд.
- *Формальной производной* ряда $A(x)$ называется формальный степенной ряд

$$A'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

- Наша цель состоит в том, чтобы проверить, что формальная производная обладает теми же свойствами, что и обычная производная функции.
- Для этого мы дадим эквивалентную переформулировку определения формальной производной, сделав его более похожим на классическое определение производной.
- Разложим выражение $A(x+t)$ по степеням t. Оказывается, что коэффициент при t^1 равен как раз $A'(x)$.
  - Здесь мы рассматриваем $A(x+t)$ как *формальный степенной ряд от двух переменных*, x и t.

Формальные степенные ряды от двух переменных

- Пусть K — коммутативное кольцо с единицей.
- Мы доказывали, что тогда $K[[x]]$ — также коммутативное кольцо с единицей.
  - И если в кольце K нет делителей нуля, то в $K[[x]]$ их также нет.
- Следовательно, мы можем рассмотреть кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из $K[[x]]$.

Определение

- Кольцо $K[[x,t]] \stackrel{\text{def}}{=} \big(K[[x]]\big)[[t]]$ называется *кольцом формальных степенных рядов от двух переменных*.

Замечание

- Формально, элемент кольца $K[[x,t]]$ — это "последовательность последовательностей" элементов кольца K, т. е. бесконечная двумерная матрица $F = (f_{k\ell})_{k,\ell=0}^{\infty}$, где $f_{k\ell} \in K$.
- Эти элементы записывают как формальные суммы вида $F(x,t) = \sum_{k,\ell \geq 0} f_{k\ell} x^k t^\ell$.

Формальная производная и ряды от двух переменных

- Пусть $F(x,t)=\sum_{k,\ell\geq 0} f_{k\ell}x^k t^\ell$ и $G(x,t)=\sum_{k,\ell\geq 0} g_{k\ell}x^k t^\ell$. Тогда легко видеть, что их сумма и произведение задаются следующими формулами:
  - $(F+G)(x,t)=\sum_{k,\ell\geq 0}(f_{k\ell}+g_{k\ell})x^k t^\ell$;
  - $(F\cdot G)(x,t)=\sum_{k,\ell\geq 0} h_{k\ell}x^k t^\ell$, где $h_{k\ell}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell} f_{ij}g_{k-i,\ell-j}$.
- По доказанному выше, $K[[x,t]]$ — коммутативное кольцо с единицей.
- Более того, если в кольце K нет делителей нуля, то в кольце $K[[x,t]]$ также нет делителей нуля.
- Аналогично можно определить $K[[x_1,\dots,x_n]]$ — *кольцо формальных степенных рядов от n переменных*.

Лемма

$A(x+t)=A(x)+A'(x)t+U(x,t)t^2$, где $U(x,t)\in K[[x,t]]$.

Доказательство. Пусть $A(x)=\sum_{k\geq 0} a_k x^k$. Тогда

$$A(x+t)=\sum_{k\geq 0} a_k(x+t)^k=\sum_{k\geq 0} a_k\Big(x^k+kx^{k-1}t+\sum_{i=2}^{k} C_k^i x^{k-i}t^i\Big)=$$
$$=\sum_{k\geq 0} a_k x^k+\Big(\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}\Big)t+\Big(\sum_{k\geq 2}\sum_{i=2}^{k} a_k C_k^i x^{k-i}t^{i-2}\Big)t^2.$$

$\square$

Свойства формальной производной

Следствие

$$A'(x) = \left.\frac{A(x+t) - A(x)}{t}\right|_{t=0}.$$

Теорема

1. $(A+B)'(x) = A'(x) + B'(x)$;
2. $(AB)'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$;
3. $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}$;
4. $(A(B(x)))' = A'(B(x))B'(x)$.

Доказательство. Пусть
$A(x+t) = A(x) + A'(x)t + U(x,t)t^2$ и $B(x+t) = B(x) + B'(x)t + V(x,t)t^2$.
Тогда

1. $(A+B)(x+t) = (A+B)(x) + (A'(x) + B'(x))t + (U(x,t) + V(x,t))t^2$;

Свойства формальной производной

2. $(AB)(x+t) = (A(x) + A'(x)t + U(x,t)t^2)(B(x) + B'(x)t + V(x,t)t^2) =$
$= (AB)(x) + (A'(x)B(x) + A(x)B'(x))t + W(x,t)t^2;$

3. $A(x) = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) B(x) \Rightarrow A'(x) = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' B(x) + \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) B'(x)$
$\Rightarrow \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}.$

4. Пусть $T(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} B(x+t) - B(x) = t(B'(x) + V(x,t)t)$.

- Отметим, что ряды $B(x)$ и $T(x,t)$ имеют нулевые свободные члены. Так что их можно подставить в выражение для $A(x+t)$ вместо x и t соответственно.
- Тогда

$$\begin{aligned}
A(B(x+t)) &= A(B(x) + T(x,t)) = \\
&= A(B(x)) + A'(B(x))T(x,t) + U(B(x), T(x,t))T^2(x,t) = \\
&= A(B(x)) + A'(B(x))B'(x)t + \\
&\quad + (A'(B(x))V(x,t) + U(B(x), T(x,t))(B'(x) + V(x,t)t)^2)t^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Формальная производная: примеры

Здесь и далее мы будем рассматривать кольцо $\mathbb{R}[[x]]$.

1. Очевидно, что $A'(x) = 0 \iff A(x) = a_0 \in \mathbb{R}$.
   - Более того, если $A'(x) = B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$, то $A(x) = a_0 + \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1}$.
2. Как и раньше, пусть $e^x = \exp(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$. Тогда $\exp'(x) = exp(x)$.
   - Более того, если $A'(x) = A(x)$, то $A(x) = a_0 \exp(x)$.
   - Действительно, если $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, то приравняв коэффициенты при x^{k-1} в равенстве $A'(x) = A(x)$ получим $a_{k-1} = ka_k$, откуда $a_k = \frac{a_0}{k!}$.
3. Введем также обозначение $\ln(1+x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$. Тогда $\ln(1+x)' = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x}$.
4. Пусть $B(x)$ — формальный степенной ряд, такой, что $B(0) = 1$. Тогда мы можем определить *логарифм* этого ряда как композицию двух формальных степенных рядов: $\ln B(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ln(1 + (B(x) - 1))$.
   - Заметим, что тогда $(\ln B(x))' = \frac{B'(x)}{B(x)}$.

Логарифмическая производная и её свойства

Определение

Формальный степенной ряд $\frac{B'(x)}{B(x)}$ называется *логарифмической производной* ряда $B(x)$ (где $B(0) = 1$).

Лемма

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ *таковы, что* $A(0) = B(0) = 1$ *и* $\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{B'(x)}{B(x)}$*.*
Тогда $A(x) = B(x)$*.*

Доказательство.

$$0 = \frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{A'(x)B(x)-A(x)B'(x)}{A(x)B(x)} = \frac{A'(x)B(x)-A(x)B'(x)}{B^2(x)} \frac{B(x)}{A(x)} = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' \cdot \frac{B(x)}{A(x)}.$$

- Следовательно, $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = 0$, то есть $\frac{A(x)}{B(x)}$ — константа.
- Поскольку $A(0) = B(0) = 1$, получаем, что $A(x) = B(x)$. □

Следствие

Если $\ln A(x) = \ln B(x)$*, то* $A(x) = B(x)$*.*

Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

Теорема

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ *таковы, что* $A(0) = 0, B(0) = 1$ *и* $\frac{B'(x)}{B(x)} = A'(x)$*.*
Тогда $B(x) = \exp(A(x))$*.*

Доказательство.

- $\dfrac{(\exp(A(x)))'}{\exp(A(x))} = \dfrac{\exp(A(x))A'(x)}{\exp(A(x))} = A'(x) = \dfrac{B'(x)}{B(x)}$.
- Тогда по лемме $B(x) = \exp(A(x))$. □

Замечание

- Мы видели, что если $A(0) = 0$, то можно рассмотреть *экспоненту* $\exp(A(x))$. При этом, $\exp(A(0)) = 1$.
- А если $B(0) = 1$, то можно рассмотреть логарифм $\ln(B(x))$. И тогда $\ln(B(0)) = 0$.
- Как и для чисел, эти две операции оказываются взаимно обратными.

Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

Теорема

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ *таковы, что* $A(0) = 0$ *и* $B(0) = 1$. *Тогда*

1. $\ln(\exp(A(x))) = A(x)$;
2. $\exp(\ln(B(x))) = B(x)$.

Доказательство.

1. $(\ln(\exp(A(x))))' = \dfrac{(\exp(A(x)))'}{\exp(A(x))} = \dfrac{\exp(A(x))A'(x)}{\exp(A(x))} = A'(x)$.

2. $\dfrac{(\exp(\ln(B(x))))'}{\exp(\ln(B(x))} = \dfrac{\exp(\ln(B(x)))(\ln(B(x)))'}{\exp(\ln(B(x))} = \dfrac{B'(x)}{B(x)}$.

$\square$

- Другие привычные нам свойства экспоненты и логарифма здесь также выполнены.

Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

Теорема

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ *таковы, что* $A(0) = B(0) = 1$. *Тогда* $\ln(A(x)B(x)) = \ln A(x) + \ln B(x)$.

Доказательство.

$$(\ln(A(x)B(x)))' = \frac{(A(x)B(x))'}{A(x)B(x)} = \frac{A'(x)B(x) + A(x)B'(x)}{A(x)B(x)} = \\ = \frac{A'(x)}{A(x)} + \frac{B'(x)}{B(x)} = (\ln A(x) + \ln B(x))'.$$

□

Следствие

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ *таковы, что* $A(0) = B(0) = 0$. *Тогда* $\exp(A(x) + B(x)) = \exp A(x) \exp B(x)$.

Доказательство.

$$\ln(\exp(A(x) + B(x))) = A(x) + B(x) = \\ = \ln(\exp A(x)) + \ln(\exp B(x)) = \ln(\exp A(x) \exp B(x)).$$

□

Экспоненциальные производящие функции

- Пусть $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ — произвольная последовательность чисел.
- *Экспоненциальной производящей функцией* последовательности (a_n) называется выражение

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Пример

- Найдем экспоненциальную производящую функцию последовательности a_n, заданной следующими соотношениями: $a_0 = a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ при $n \geq 2$.
- Пусть $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$.
- Тогда $A'(x) = \sum_{k\geq 1} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \sum_{k\geq 2}(a_{k-1} + (k-1)a_{k-2})\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} =$
  $= \sum_{k\geq 1} a_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k\geq 2} a_{k-2} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} = A(x) + xA(x).$
- Следовательно, $\frac{A'(x)}{A(x)} = 1 + x = (x + \frac{x^2}{2})'$.
- Таким образом, $A(x) = \exp(x + \frac{x^2}{2})$.

Экспоненциальные производящие функции для чисел Стирлинга

Теорема

$$\sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k, \text{ при всех } k \geq 0.$$

Доказательство. Индукция по k.

$k=0$: $\sum_{n\geq 0} S(n,0)\frac{x^n}{n!} = 1 = \frac{1}{0!}(e^x-1)^0$.

$k-1 \to k$: Пусть $F_k(x) = \sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$.

- $F_k(x) = \sum_{n\geq k}(kS(n-1,k)+S(n-1,k-1))\frac{x^n}{n!} =$
  $= k\sum_{n\geq k} S(n-1,k)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq k} S(n-1,k-1)\frac{x^n}{n!}$.
- $F_k'(x) = k\sum_{n\geq k} S(n-1,k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geq k} S(n-1,k-1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} =$
  $= kF_k(x) + F_{k-1}(x)$.
- По индукционному предположению имеем $F_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!}(e^x-1)^{k-1}$, следовательно,

$$F_k'(x) = kF_k(x) + \frac{1}{(k-1)!}(e^x-1)^{k-1}. \qquad (1)$$

- Также мы знаем, что $F_k(0) = 0$. $\qquad (2)$

Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла

- Заметим, что решение $F_k(x) = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$ подходит под оба условия: $\left(\frac{1}{k!}(e^x-1)^k\right)' = \frac{1}{(k-1)!}(e^x-1)^{k-1}e^x = k\frac{1}{k!}(e^x-1)^k + \frac{1}{(k-1)!}(e^x-1)^{k-1}$ и условие (2) также, очевидно, выполнено.
- Докажем, что $F_k(x)$ — единственный формальный степенной ряд, удовлетворяющий этим условиям.
- Пусть $G_k(x)$ удовлетворяет условиям (1) и (2). $H_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} G_k(x) - F_k(x)$.
- По условию (1) имеем $H_k'(x) = G_k'(x) - F_k'(x) = kG_k(x) - kF_k(x) = kH_k(x)$.
- С другой стороны, по условию (2) имеем $H_k(0) = G_k(0) - F_k(0) = 0$.
- Но тогда $H_k(x) = 0$ (в противном случае, $\nu(H_k') = \nu(H_k) - 1 \neq \nu(kH_k(x))$).
- Таким образом, $G_k(x) = F_k(x)$. $\square$

Следствие

$\sum_{n\ge0} B_n\frac{x^n}{n!} = e^{e^x-1}$.

Доказательство. $\sum_{n\ge0} B_n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\ge0}\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{x^n}{n!} =$
$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\ge k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(e^x-1)^k = e^{e^x-1}$. $\square$

Формальное возведение в степень

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

- $(1+x)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(1+x))$;
- если $A(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ и $A(0) = 1$, то $(A(x))^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(A(x)))$.

Докажем, что определенная выше операция возведения в степень формального степенного ряда обладает всеми привычными свойствами возведения в степень.

Утверждение

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$, где $A(0) = B(0) = 1$. Тогда

1. $(A(x))^\alpha (A(x))^\beta = (A(x))^{\alpha+\beta}$;
2. $((A(x))^\alpha)^\beta = (A(x))^{\alpha\beta}$;
3. $(A(x))^\alpha (B(x))^\alpha = (A(x)B(x))^\alpha$.

Формальное возведение в степень

Доказательство.

1. $$(A(x))^\alpha(A(x))^\beta = \exp(\alpha\ln(A(x)))\exp(\beta\ln(A(x))) = \\ = \exp(\alpha\ln(A(x)) + \beta\ln(A(x))) = \\ = \exp((\alpha+\beta)\ln(A(x))) = \\ = (A(x))^{\alpha+\beta}.$$
2. $$((A(x))^\alpha)^\beta = \exp(\beta\ln(A(x)^\alpha)) = \\ = \exp(\beta\ln(\exp(\alpha\ln(A(x))))) = \\ = \exp(\beta(\alpha\ln(A(x))) = \\ = (A(x))^{\alpha\beta}.$$
3. $$(A(x))^\alpha(B(x))^\alpha = \exp(\alpha\ln(A(x)))\exp(\alpha\ln(B(x))) = \\ = \exp(\alpha\ln(A(x)) + \alpha\ln(b(x))) = \\ = \exp(\alpha(\ln(A(x)) + \ln(B(x))) = \\ = \exp(\alpha\ln(A(x)B(x))) = \\ = (A(x)B(x))^\alpha.$$

□

Формальное возведение в степень

Замечание

Отметим еще несколько свойств, характерных для обычного возведения в степень. Пусть $A \in \mathbb{R}[[x]]$ и $A(0) = 1$. Тогда

- $A(x)^0 = \exp(0 \cdot \ln A(x)) = \exp(0) = 1$;
- $A(x)^1 = \exp(1 \cdot \ln A(x)) = \exp(\ln A(x)) = A(x)$;
- если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $A(x)^{\alpha+1} = A(x)^\alpha A(x)^1 = A(x)^\alpha \cdot A(x)$,
  - в частности, при $n \in \mathbb{N}$ по индукции легко показать, что $A(x)^n$ — это действительно n-я степень ряда $A(x)$;
- $A(x)^{-1} \cdot A(x) = A(x)^0 = 1$,
  - то есть $A(x)^{-1}$ — это действительно ряд, обратный к $A(x)$;
- $(A(x)^{\frac{1}{n}})^n = A(x)^{\frac{1}{n} \cdot n} = A(x)^1 = A(x)$,
  - то есть мы можем считать, что $\sqrt[n]{A(x)} \stackrel{\text{def}}{=} A(x)^{\frac{1}{n}}$.

Биномиальный ряд

Теорема

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда* $(1+x)^\alpha = \sum_{k\ge 0} \binom{\alpha}{k} x^k$, *где* $\binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Доказательство. Пусть $(1+x)^\alpha = \sum_{k\ge 0} a_k x^k$. Мы знаем, что $a_0 = 1$.

- Заметим, что $\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln((1+x)^\alpha))' = (\alpha \ln(1+x))' = \frac{\alpha}{1+x}$.
- Тогда $(1+x)((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^\alpha$. При этом, $\alpha(1+x)^\alpha = \sum_{k\ge 0} \alpha a_k x^k$ и $(1+x)((1+x)^\alpha)' = (1+x)\sum_{k\ge 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k\ge 0}((k+1)a_{k+1} + k a_k)x^k$.
- Приравнивая коэффициенты при x^k получим, что $\alpha a_k = (k+1)a_{k+1} + k a_k$ при всех $k \ge 0$, откуда $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot a_k$.
- Тогда, учитывая, что $a_0 = 1$, по индукции получаем, что $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. □

Замечание

- Доказанная выше формула для $(1+x)^\alpha$ называется *биномиальным рядом*.
- В частности, эта теорема означает, что равенство $\sqrt{1-4x} = \sum_{k\ge 0} \binom{1/2}{k}(-4x)^k$, которое мы использовали для чисел Каталана, имеет смысл и с точки зрения формальных степенных рядов.

Многомерные производящие функции

- Если комбинаторная величина задается несколькими целыми неотрицательными параметрами (индексами), то для её задания удобно использовать *производящую функцию нескольких переменных* или *многомерную* производящую функцию.
- Пусть $a\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{R}$. *Многомерной производящей функцией* величины $a(i_1, \dots, i_n)$ называется выражение

$$A(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n \geq 0} a(i_1, \dots, i_n) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

- Многомерную производящую функцию можно рассматривать как формальный степенной ряд от нескольких переменных (т. е. как элемент кольца $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$).
- Также можно говорить о сходимости такого ряда в некоторой окрестности нуля. Тогда получится функция от n переменных, действующая из некоторого подмножества $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Многомерные производящие функции: примеры

1. Двумерная производящая функция для биномиальных коэффициентов
$\sum_{n,k\geq 0} C_n^k x^k y^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k\right) y^n = \sum_{n\geq 0}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}$.
2. Симметричная форма записи биномиальных коэффициентов
$$\sum_{m,n\geq 0} C_{m+n}^m x^m y^n = \sum_{k\geq 0}\sum_{m+n=k} C_{m+n}^m x^m y^n = \sum_{k\geq 0}(x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$
3. Разбиения целочисленных векторов
   - Пусть $N(a,b)$, где $a,b \in \mathbb{N}_0$, — число разбиений вектора $(a,b) \in \mathbb{N}_0^2$ на различные векторы, координаты которых отличаются на 1.
   - Например, $(6,4) = (1,0)+(5,4)$;
     $(6,4) = (2,1)+(4,3)$;
     $(6,4) = (0,1)+(1,0)+(2,1)+(3,2)$.
   - Следовательно, $N(6,4) = 3$.
   - Тогда $\sum_{a,b\geq 0} N(a,b)u^a v^b = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^k)(1+u^k v^{k-1})$.

Доказательство. $N(a,b)$ — число способов представить $u^a v^b$ в виде произведения различных мономов вида $u^{k-1}v^k$ и $u^k v^{k-1}$. А это и есть коэффициент при $u^a v^b$ в правой части. □

Тождество Гаусса-Якоби

Теорема (тождество Гаусса-Якоби)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^k)(1+u^kv^{k-1})(1-u^kv^k)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}u^{\frac{q(q+1)}{2}}v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$

- Ниже мы дадим комбинаторное доказательство тождества Гаусса-Якоби.
- Для этого изучим свойства чисел $N(a,b)$.
- Каждое разбиение вектора (a,b) будем записывать в следующем виде:

$$(a,b)=(k_1+1,k_1)+\ldots+(k_s+1,k_s)+(\ell_1,\ell_1+1)+\ldots+(\ell_t,\ell_t+1),$$

где $k_1>\ldots>k_s\geq 0$ и $\ell_1>\ldots>\ell_t\geq 0$.

- Такое разбиение будем обозначать через $(k_1,\ldots,k_s|\ell_1,\ldots,\ell_t)$.
- Например, разбиения вектора $(6,4)$ обозначим $(4,0|)$, $(3,1|)$, $(2,1,0|0)$.
- Докажем несколько лемм.

Свойства разбиений целочисленных векторов

Лемма 1

$N(a,b) > 0 \iff a+b \geq (a-b)^2$.

Доказательство. Пусть, не умаляя общности, $a \geq b$.

“$\Rightarrow$”: Рассмотрим разбиение $(k_1,\ldots,k_s|\ell_1,\ldots,\ell_t)$ вектора (a,b).

- Очевидно, что $a-b = s-t \geq 0$.
- $a+b = (2k_1+1)+\ldots+(2k_s+1)+(2\ell_1+1)+\ldots+(2\ell_t+1) \geq$
  $\geq 1+3+\ldots+(2s-1) = s^2 \geq (s-t)^2 = (a-b)^2$.

“$\Leftarrow$”: Пусть $q = a-b$.

- Если $q = 0$, то $(a,a) = (a,a-1)+(0,1)$. Т. е. $(a-1|0)$ — разбиение (a,b).
- Если $q > 0$, то рассмотрим разбиение $(q-1,q-2,\ldots,0|)$.
  - Это разбиение вектора (a',b'), где $a'-b' = a-b \geq 0$.
  - Заметим, что $a'+b' = 1+3+\ldots+(2q-1) = q^2 \leq a+b$.
  - Тогда $a = a'+m$ и $b = b'+m$, где $m \geq 0$.
  - Следовательно, $(q-1+m,q-2,\ldots,0|)$ — разбиение (a,b). $\square$

Свойства разбиений целочисленных векторов

- Далее, мы будем рассматривать только векторы, для которых $N(a, b) > 0$.
- Очевидно, что число $a + b - (a - b)^2$ всегда четно.
- Введем обозначения $m = \frac{a+b-(a-b)^2}{2}$ и $q = a - b$. Тогда $m \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{Z}$.
- Заметим, что числа a и b однозначно выражаются через m и q.

Действительно
  - $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2m+q^2+q}{2} = m + \frac{q(q+1)}{2}$;
  - $b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{2m+q^2-q}{2} = m + \frac{q(q-1)}{2}$.
- Введем обозначение

$$t(m, q) \stackrel{\text{def}}{=} N\left(m + \frac{q(q+1)}{2}, m + \frac{q(q-1)}{2}\right).$$

Лемма 2

При всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство $t(m, q) = t(m, 0)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при $q > 0$ выполнено равенство $t(m, q) = t(m, q - 1)$ (при $q < 0$ все симметрично).

Свойства разбиений целочисленных векторов: зависимость только от m

- Пусть $T(m,q)$ — множество всех разбиений $(m+\frac{q(q+1)}{2}, m+\frac{q(q-1)}{2})$.
- Построим биекцию между $T(m,q)$ и $T(m,q-1)$:

$$\varphi(k_1,\dots,k_s|\ell_1,\dots,\ell_t) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} (k_1-1,\dots,k_s-1|\ell_1+1,\dots,\ell_t+1,0), & k_s>0 \\ (k_1-1,\dots,k_{s-1}-1|\ell_1+1,\dots,\ell_t+1), & k_s=0. \end{cases}$$

- Обозначим через a', b', s', t', m', q' характеристики получившегося разбиения, аналогичные a, b, s, t, m и q соответственно.
- Заметим, что в каждом из случаев $s'-t'=s-t-1$, т. е. $q'=q-1$.
- Также легко видеть, что во всех случаях $a'+b'=(a+b)-2s+2t+1$, откуда $m'=\frac{a'+b'-(a'-b')^2}{2}=\frac{a+b-2q+1-(q-1)^2}{2}=\frac{a+b-q^2}{2}=m$.
- Наконец, φ — биекция, поскольку можно построить обратное отображение:

$$\psi(k_1,\dots,k_s|\ell_1,\dots,\ell_t) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} (k_1+1,\dots,k_s+1,0|\ell_1-1,\dots,\ell_t-1), & \ell_t>0 \\ (k_1+1,\dots,k_s+1|\ell_1-1,\dots,\ell_{t-1}-1), & \ell_t=0. \end{cases}$$

$\square$

Связь разбиений чисел и векторов

Лемма 3

При всех $m \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство $t(m, 0) = p(m)$.

Доказательство. Нужно доказать, что число разбиений вектора (m, m) равно числу разбиений m.

- Построим биекцию между этими разбиениями.
- Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга из m клеток.
- Проведем в этой диаграмме диагональ из левого нижнего угла направо-вверх. Пусть в ней s клеток.
  - Пусть k_i — количество клеток в i-й строке, находящихся правее выделенной диагонали.
  - Аналогично, ℓ_j — количество клеток в j-м столбце, находящихся выше выделенной диагонали.
  - Тогда $(k_1, \ldots, k_s | \ell_1, \ldots, \ell_s)$ — разбиение вектора (m, m).
- К этому преобразованию легко построить обратное, поэтому оно — биекция. □

Доказательство тождества Гаусса-Якоби

Доказательство.

$$\prod_{k\geq 1}(1+u^{k-1}v^k)(1+u^kv^{k-1}) = \sum_{a,b\geq 0} N(a,b)u^av^b =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} t(m,q)u^{m+\frac{q(q+1)}{2}}v^{m+\frac{q(q-1)}{2}} =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m\geq 0} p(m)u^mv^m\right)u^{\frac{q(q+1)}{2}}v^{\frac{q(q-1)}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-u^kv^k}\sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}}v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$

Домножив обе части равенства на $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-u^kv^k)$ получим

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^k)(1+u^kv^{k-1})(1-u^kv^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}}v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$

$\square$

Доказательство пентагональной формулы Эйлера через тождество Гаусса-Якоби

Следствие (пентагональная формула Эйлера)

$$\prod_{k\ge1}(1-x^k)=1+\sum_{k\ge1}(-1)^k\left(x^{\frac{k(3k-1)}{2}}+x^{\frac{k(3k+1)}{2}}\right).$$

Доказательство.

- Подставим в тождество Гаусса-Якоби $u=-t, v=-t^2$.
- В левой части получим $\prod\limits_{k\ge1}(1-t^{3k-2})(1-t^{3k-1})(1-t^{3k})$.
- В правой части: $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}}t^{k(k+1)/2}t^{k(k-1)}=$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k t^{k(3k-1)/2}=1+\sum_{k\ge1}(-1)^k(x^{\frac{k(3k-1)}{2}}+x^{\frac{k(3k+1)}{2}}).$$

$\square$

Рекуррентная формула для числа разбиений

Теорема

$$p(n) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right)\right).$$

Замечание

- Здесь мы считаем, что $p(m) = 0$ при $m < 0$. То есть рассматриваются только те слагаемые, где p берется от неотрицательных чисел.
- Если развернуть эту формулу, то получится
$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots.$

Доказательство. Заметим, что

$$1 = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k\geq 1} (1-x^k) = \left(\sum_{k\geq 0} p(k)x^k\right)\left(1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \left(x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}}\right)\right).$$

- Раскрыв скобки в правой части и рассмотрев коэффициент при x^n получим:

$$0 = p(n) + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right)\right). \qquad \square$$