

Дискретная математика

Сергей Николенко, весенний семестр 2013 г.

1. Основные понятия логики высказываний.

- (a) Высказывания и логические формулы. Пропозициональные связки. Таблицы истинности, примеры. Примеры тавтологий.
- (b) Математические рассуждения: прямое, обратное, от противного.
- (c) Индуктивное определение логической формулы. Зачем нужны скобки. Как без них обойтись: польская (префиксная) запись.
- (d) Дерево разбора формулы. Задание логических функций булевыми схемами.

2. Нормальные формы.

- (a) Как по таблице истинности построить формулу?
- (b) Нормальные формы: [совершенная] дизъюнктивная и [совершенная] конъюнктивная.
- (c) Примеры. Упрощение СДНФ/СКНФ до ДНФ/КНФ. Примеры с упрощением.
- (d) Пример функции, у которой нет коротких НФ: функция чётности PARITY.
- (e) Пример функции, которую вообще трудно коротко записать: функция большинства MAJORITY.

3. Системы логических связок.

- (a) Полные системы связок. Почему система $\{\wedge, \vee, \neg\}$ полна?
- (b) Какие вообще бывают булевы функции от двух переменных?
- (c) Примеры полных систем: $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\}\}$.
- (d) Система $\{\oplus, \wedge, 1\}$: полиномы Жегалкина. Примеры.
- (e) Теорема о существовании и единственности полинома Жегалкина для булевой формулы.

4. Теорема Поста.

- (a) Примеры неполных систем. Почему они неполны. Почему неполны $\{\wedge, \vee\}$, $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, $\{\oplus, \neg\}$.
- (b) Свойства булевских функций: функции, сохраняющие ноль, сохраняющие единицу, линейные, монотонные, самодвойственные.
- (c) Теорема Поста.
- (d) Аксиомы булевой алгебры. Два примера: логика высказываний и множество подмножеств.

5. О множествах и отношениях.

- (a) Формула включений и исключений: доказательство по индукции.
- (b) Характеристические функции. Алгебраическое доказательство формулы включений и исключений.
- (c) Декартовы произведения. Бинарные отношения. Основные определения: композиция, функция, свойства функций, последовательность.
- (d) Свойства отношений: [анти]рефлексивность, [анти]симметричность, [анти]транзитивность.
- (e) Свойства функций: инъективность, сюръективность, биективность.

6. Специальные виды отношений.

- (a) Как представлять отношения. Графы: направленные и ненаправленные. Как свойства отношений отражаются на виде графа?
- (b) Матрицы смежности. Пути в графах. Число путей заданной длины как степень матрицы смежности.
- (c) Отношения эквивалентности. Примеры. Классы эквивалентности, теорема о том, что они образуют разбиение.
- (d) Частичные порядки. Диаграммы Хассе. Примеры. Линейные порядки.

7. Парадоксы голосований.

- (a) Желаемые свойства системы голосований: транзитивность, попарная независимость предпочтений, положительная ассоциированность, единогласие. «Хорошие» системы: выбор большинством из двух альтернатив, диктаторские системы.
- (b) Парадокс Кондорсе. Зависимость от порядка голосования. Поправки-убийцы (killer amendments).
- (c) Парадокс с нарушением оптимальности по Парето (в зависимости от порядка голосования). Парадокс с нарушением положительной ассоциированности (выборы президента РФ).
- (d) Формулировка теоремы Эрроу (без доказательства).

8. Порядки и решётки.

- (a) Примеры порядков: лексикографический, префиксный. Наибольший, наименьший, максимальный, минимальный элементы; \sup и \inf .
- (b) Изоморфизмы и автоморфизмы частичных порядков. Примеры.
- (c) Полурешётки: верхняя и нижняя. Примеры. Префиксный порядок на строках как нижняя полурешётка.
- (d) Функции $x \wedge y$ и $x \vee y$ на решётке. Дистрибутивность, примеры недистрибутивных решёток.

9. Графы: основные определения.

- (a) Графы: направленные и ненаправленные. Смежные вершины, инцидентность.
- (b) Эйлеров цикл, эйлеров путь, гамильтонов цикл, гамильтонов путь.
- (c) Полный граф K_n . Полный двудольный граф $K_{m,n}$. Сколько рёбер в K_n и $K_{m,n}$?
- (d) Планарные графы. Два минимальных непланарных графа и теорема Куратовского (без доказательства).

10. Поиск путей в графе.

- (a) Поиск путей в графе. Алгоритм Дейкстры.
- (b) Вычисление матрицы достижимости: алгоритм Уоршела.
- (c) Вычислительно сложные задачи на графах: задача коммивояжёра.

11. Деревья поиска.

- (a) Бинарные деревья. Сбалансированные деревья.
- (b) Рекурсивные алгоритмы: вставка и поиск в сбалансированном дереве.
- (c) Зачем нужно дерево поиска? Чем оно лучше, чем линейный поиск по списку?