Априорные распределения II

Сергей Николенко

Академический Университет, весенний семестр 2011

Outline

1. Априорное распределение, сопряжённое нормальному
   - Напоминание
   - Когда оба параметра меняются

Напоминание

- Напоминаю, что основная наша задача – как обучить параметры распределения и/или предсказать следующие его точки по имеющимся данным.
- В байесовском выводе участвуют:
  - $p(x \mid \theta)$ – правдоподобие данных;
  - $p(\theta)$ – априорное распределение;
  - $p(x) = \int_{\Theta} p(x \mid \theta) p(\theta) d\theta$ – маргинальное правдоподобие;
  - $p(\theta \mid x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}$ – апостериорное распределение;
  - $p(x' \mid x) = \int_{\Theta} p(x' \mid \theta) p(\theta \mid x) d\theta$ – предсказание нового x'.
- Задача обычно в том, чтобы найти $p(\theta \mid x)$ и/или $p(x' \mid x)$.

Что мы уже знаем

- Если в нормальном распределении зафиксировать σ^2 и обучать μ, сопряжённым априорным распределением будет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, параметры которого меняются как

$$p(\mu \mid x) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}x + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}\mu_0, \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1}\right).$$

- В терминах (μ, τ) (где $\tau = \frac{1}{\sigma^2}$)

$$p(\mu \mid x) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\tau}{\tau + \tau_0}x + \frac{\tau_0}{\tau + \tau_0}\mu_0, \tau + \tau_0\right).$$

- Несколько точек $x_1, \ldots, x_n$ можно заменить на их среднее $\bar{x}$ с дисперсией $\frac{\sigma^2}{n}$.

Что мы уже знаем

- Если зафиксировать μ и менять σ^2, то сопряжённым априорным распределением будет обратное гамма-распределение:

$$p(\sigma^2 \mid \alpha, \beta) \propto IG(\alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} z^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-\beta}{z}\right).$$

- Тогда в апостериорном распределении будет

$$p(\sigma^2 \mid x_1, \ldots, x_n, \alpha, \beta) \propto IG\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum (x_i - \mu)\right).$$

Что мы уже знаем

- В терминах τ будет обычное гамма-распределение:

$$p(\tau \mid \alpha, \beta) \propto G(\alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\left(-\tau\beta\right).$$

- И апостериорное распределение:

$$p(\tau \mid x_1, \ldots, x_n, \alpha, \beta) \propto G\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum (x_i - \mu)\right) \propto$$
$$\propto \tau^{\alpha + \frac{n}{2} - 1} \exp\left(-\tau\left(\beta + \frac{1}{2}\sum (x_i - \mu)\right)\right).$$

Когда и μ, и σ^2 меняются

- Что делать, когда и μ, и σ^2 меняются?
- Можно было бы предположить, что μ и σ^2 независимы; тогда просто априорное распределение будет

$$p(\mu, \sigma \mid \mu_0, \sigma_0, \alpha, \beta) \propto \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \cdot IG(\alpha, \beta).$$

- К сожалению, это распределение не будет сопряжённым нормальным. Почему?

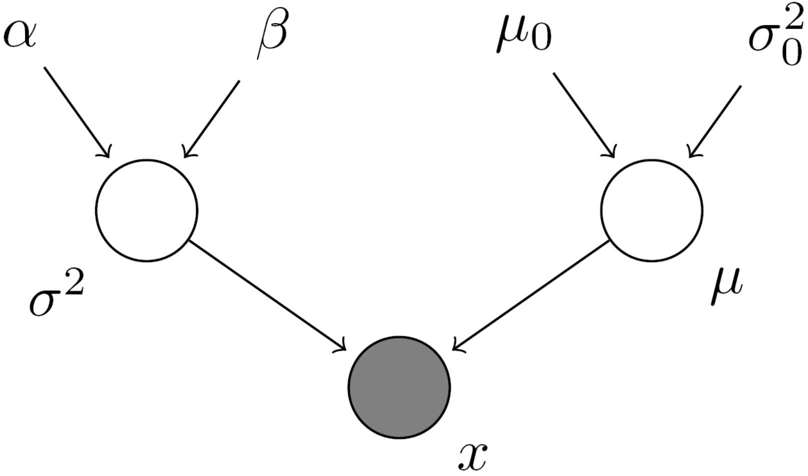
Когда и μ, и σ^2 меняются

- Что делать, когда и μ, и σ^2 меняются?
- Можно было бы предположить, что μ и σ^2 независимы; тогда просто априорное распределение будет

$$p(\mu, \sigma \mid \mu_0, \sigma_0, \alpha, \beta) \propto \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \cdot IG(\alpha, \beta).$$

- К сожалению, это распределение не будет сопряжённым нормальным. Почему?
- Потому что μ и σ^2 зависимы. :) Новая точка x вводит зависимость между ними.

Графическая модель



Когда и μ, и σ^2 меняются

- В настоящем сопряжённом априорном распределении будут:
$$\begin{aligned} x \mid \mu, \tau &\sim \mathcal{N}(\mu, \tau), \\ \mu \mid \tau &\sim \mathcal{N}(\mu_0, n_0\tau), \\ \tau &\sim G(\alpha, \beta). \end{aligned}$$
- Давайте выясним, как изменятся параметры, и заодно докажем.

Когда и μ, и σ^2 меняются

- Самое простое – это, по уже известным результатам,

$$\mu \mid x, \tau \sim \mathcal{N}\left(\frac{n\tau}{n\tau + n_0\tau}\bar{x} + \frac{n_0\tau}{n\tau + n_0\tau}\mu_0, n\tau + n_0\tau\right).$$

- Затем давайте разберёмся с $\tau \mid x$:

$$p(\tau, \mu \mid x) \propto p(\tau) \cdot p(\mu \mid \tau) \cdot p(x \mid \tau, \mu),$$

и мы хотим это распределение маргинализовать по μ...

Когда и μ, и σ^2 меняются

- Подсчитаем:

$$\begin{aligned} p(\tau, \mu \mid x) &\propto p(\tau) \cdot p(\mu \mid \tau) \cdot p(x \mid \tau, \mu) \\ &\propto \tau^{\alpha-1} e^{-\tau\beta} \cdot \tau^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n_0 \tau}{2}(\mu-\mu_0)^2} \cdot \tau^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}\sum(x_i-\mu)^2} \\ &\propto \tau^{\alpha+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\tau\left(\beta+\frac{1}{2}\sum(x_i-\bar{x})^2\right)} e^{-\frac{\tau}{2}\left(n_0(\mu-\mu_0)^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right)} \end{aligned}$$

(простой трюк: $x_i - \mu = x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu$).

Когда и μ, и σ^2 меняются

- Теперь надо проинтегрировать

$$\int_{\mu} e^{-\frac{\tau}{2}\left(n_0(\mu-\mu_0)^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right)} d\mu.$$

Упражнение. Проинтегрируйте. :) Должна получиться нормировочная константа

$$\tau^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-nn_0\tau}{2(n+n_0)}(\bar{x}-\mu_0)^2}.$$

Когда и μ, и σ^2 меняются

- Таким образом, получается апостериорное распределение

$$p(\tau \mid x) \propto \tau^{\alpha+\frac{n}{2}-1} e^{-\tau\left(\beta+\frac{1}{2}\sum(x_i-\bar{x})^2+\frac{nn_0}{2(n+n_0)}(\bar{x}-\mu_0)^2\right)}.$$

- Итого результаты такие:

$$\begin{aligned}\mu \mid \tau, x &\sim \mathcal{N}\left(\frac{n\tau}{n\tau+n_0\tau}\bar{x} + \frac{n_0\tau}{n\tau+n_0\tau}\mu_0, n\tau + n_0\tau\right),\\ \tau \mid x &\sim G\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum(x_i - \bar{x})^2 + \frac{nn_0}{2(n+n_0)}(\bar{x} - \mu_0)^2\right).\end{aligned}$$

Предсказание

- Теперь предсказание нового x_{new}:

$$p(x_{\mathrm{new}} \mid x) = \int\int \underbrace{\mathrm{Gamma}}_{\tau|x} \cdot \underbrace{\mathrm{Gaussian}}_{\mu|\tau,x} \cdot \underbrace{\mathrm{Gaussian}}_{x_{\mathrm{new}}|\tau,\mu} d\tau d\mu =$$

$$= \int \underbrace{\mathrm{Gamma}}_{\tau|x} \int \underbrace{\mathrm{Gaussian}}_{\mu|\tau,x} \cdot \underbrace{\mathrm{Gaussian}}_{x_{\mathrm{new}}|\tau,\mu} d\tau d\mu =$$

$$= \int \underbrace{\mathrm{Gamma}}_{\tau|x} \cdot \underbrace{\mathrm{Gaussian}}_{x_{\mathrm{new}}|\tau,x} d\tau = \ldots$$

- Упражнение (с прошлой лекции): какое распределение получится?

Упражнение. Запишите формулу апостериорного распределения $p(x_{\mathrm{new}} \mid x)$.

Thank you!

Спасибо за внимание!