Обучение с подкреплением II

Сергей Николенко

Академический Университет, 2012

Outline

И спросила кроха

- Вернёмся теперь к задаче с несколькими состояниями.
- Вознаграждения (rewards) – на каждом шаге: $r_t, r_{t+1}, \ldots$
- Но что такое «хорошо» in the long run? Как оценивать поведение алгоритма в приведённом выше сеттинге?
- Если есть естественное конечное число шагов (партия), то это *эпизодическая задача* (episodic task), и логично суммировать вознаграждение по эпизоду (до терминального состояния).
- А что с продолжающимися задачами?

Разные модели

- Ваши версии?

Разные модели

- Модель *конечного горизонта*: агент обращает внимание только на следующие h шагов: $E\left[\sum_{t=0}^{h} r_t\right]$.

Разные модели

- Модель *конечного горизонта*: агент обращает внимание только на следующие h шагов: $E\left[\sum_{t=0}^{h} r_t\right]$.
- Модель *бесконечного горизонта*: хотелось бы учесть все возможные шаги в будущем, т.к. время жизни агента может быть не определено. Но при этом чем раньше получим прибыль, тем лучше. Как это учесть?

Разные модели

- Модель *конечного горизонта*: агент обращает внимание только на следующие h шагов: $E\left[\sum_{t=0}^{h} r_t\right]$.
- Модель *бесконечного горизонта*: хотелось бы учесть все возможные шаги в будущем, т.к. время жизни агента может быть не определено. Но при этом чем раньше получим прибыль, тем лучше. Как это учесть?
- $$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t\right],$$

  где γ — некоторая константа (discount factor).

Разные модели

- Модель *конечного горизонта*: агент обращает внимание только на следующие h шагов: $E\left[\sum_{t=0}^{h} r_t\right]$.
- Модель *бесконечного горизонта*: хотелось бы учесть все возможные шаги в будущем, т.к. время жизни агента может быть не определено. Но при этом чем раньше получим прибыль, тем лучше. Как это учесть?
- $$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t\right],$$
  где γ — некоторая константа (discount factor).
- Модель *среднего вознаграждения* (average-reward model):
  $$\lim_{h\to\infty} E\left[\frac{1}{h}\sum_{t=0}^{h} r_t\right].$$

Что мы будем использовать

- Все модели разные, приводят к разным результатам.
- Обычно используется модель бесконечного горизонта с некоторым фиксированным discount factor. Её и мы будем использовать.
- Кроме того, её можно обобщить на эпизодические задачи: достаточно просто положить $\gamma = 1$ и добавить одно лишнее состояние с вознаграждением 0, которое будет замкнуто на себя. Так что отныне навсегда

$$R_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1}.$$

Как оценивать качество обучения?

- Предыдущие модели могут оценивать готовый обучившийся алгоритм. Как оценивать качество обучения?

Как оценивать качество обучения?

- Предыдущие модели могут оценивать готовый обучившийся алгоритм. Как оценивать качество обучения?
- Рано или поздно сходится к оптимальному. Это часто можно доказать, но может быть слишком медленно и/или со слишком большими потерями по дороге.

Как оценивать качество обучения?

- Предыдущие модели могут оценивать готовый обучившийся алгоритм. Как оценивать качество обучения?
- Рано или поздно сходится к оптимальному. Это часто можно доказать, но может быть слишком медленно и/или со слишком большими потерями по дороге.
- Сходится с большой скоростью. Два подхода:
  - Скорость сходимости к какой-то фиксированной доле оптимальности. Какой?
  - Насколько хорошо себя ведёт алгоритм после фиксированного времени. Какого?

Как оценивать качество обучения?

- Предыдущие модели могут оценивать готовый обучившийся алгоритм. Как оценивать качество обучения?
- Рано или поздно сходится к оптимальному. Это часто можно доказать, но может быть слишком медленно и/или со слишком большими потерями по дороге.
- Сходится с большой скоростью. Два подхода:
  - Скорость сходимости к какой-то фиксированной доле оптимальности. Какой?
  - Насколько хорошо себя ведёт алгоритм после фиксированного времени. Какого?
- Минимизировать цену (regret), т.е. уменьшение общей суммы выигрыша по сравнению с оптимальной стратегией с самого начала. Это очень хорошая мера, но результаты о ней получить очень сложно.

Марковские процессы

- *Марковский процесс принятия решений* (Markov decision process) состоит из:
  - множества состояний S;
  - множества действий A;
  - функции поощрения $R : S \times A \longrightarrow \mathbb{R}$; ожидаемое вознаграждение при переходе из s в s' после a – $R^a_{ss'}$;
  - функции перехода между состояниями $p^a_{ss'} : S \times A \longrightarrow \Pi(S)$, где $\Pi(S)$ — множество распределений вероятностей над S. Вероятность попасть из s в s' после a — $P^a_{ss'}$.
- Модель *марковская*, если переходы не зависят от истории предыдущих переходов.

Подкрепление и значение состояния

- Главный момент – разница между *reward function* (непосредственное подкрепление) и *value function* (общее подкрепление, ожидаемое, если начать с этого состояния).
- Суть многих методов обучения с подкреплением – в том, чтобы оценивать и оптимизировать value function.
- Для марковских процессов можно формально определить:

$$V^{\pi}(s) = \mathrm{E}_{\pi}\left[R_t \mid s_t = s\right] = \mathrm{E}_{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s\right].$$

Подкрепление и значение состояния

- Можно более детализированно – общее подкрепление, ожидаемое, если начать с состояния s и действия a:

$$Q^{\pi}(s, a) = \mathrm{E}_{\pi}\left[R_t \mid s_t = s, a_t = a\right] = \\ = \mathrm{E}_{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s, a_t = a\right].$$

- Функции V и Q – это как раз то, что нам нужно оценить; если бы мы их знали, можно было бы просто выбирать то a, которое максимизирует $Q(s, a)$.

Подкрепление и значение состояния

- Для известной стратегии π V^{π} удовлетворяют уравнениям Беллмана:

$$V^{\pi}(s) = \mathrm{E}_{\pi}\left[R_t \mid s_t = s\right] = \mathrm{E}_{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s\right] =$$

$$= \mathrm{E}_{\pi}\left[r_{t+1} + \gamma\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s\right] =$$

$$= \sum_a \pi(s,a)\sum_{s'} P^a_{ss'}\left(R^a_{ss'} + \gamma\mathrm{E}_{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k r_{t+k+2} \mid s_{t+1} = s'\right]\right) =$$

$$= \sum_a \pi(s,a)\sum_{s'} P^a_{ss'}\left(R^a_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s')\right).$$

Две основные задачи

- Предположим, что мы уже точно знаем нашу модель. Задача — найти оптимальную стратегию поведения для агента в этой модели.
- Реальная ситуация: модель не знаем, надо и модель узнать, и оптимально себя повести.
- Сначала решим первую задачу, без неё все равно не будет второй.

Оптимальные значения состояний

- *Оптимальное значение состояния* — ожидаемая суммарная прибыль, которую получит агент, если начнёт с этого состояния и будет следовать оптимальной стратегии:

$$V^*(s) = \max_{\pi} E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t\right].$$

- Эту функцию можно определить как решение уравнений

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s' \in S} P^a_{ss'} \left(R^a_{ss'} + \gamma V^*(s')\right),$$

  а затем выбрать оптимальную стратегию

$$\pi^*(s) = \arg\max_a \sum_{s' \in S} P^a_{ss'} \left(R^a_{ss'} + \gamma V^*(s')\right).$$

- Как решать уравнения?

Policy evaluation

- Чтобы посчитать value functions для данной стратегии π, можно просто итеративно пересчитывать по уравнениям Беллмана:

$$V^{\pi}(s) := \sum_a \pi(s,a) \sum_{s' \in S} P^a_{ss'} \left(R^a_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s') \right),$$

пока не сойдётся.

- Соответственно, для оптимального надо решать уравнения с максимумами:

$$V^{*}(s) := \max_a \sum_{s' \in S} P^a_{ss'} \left(R^a_{ss'} + \gamma V^{*}(s') \right).$$

Итеративное решение (по значениям)

- Можно то же самое по Q: пока не сойдётся,

$$Q(s,a) := \sum_{s' \in S} P_{ss'}^{a} \left(R_{ss'}^{a} + \gamma \sum_{a'} \pi(s,a') Q(s,a') \right).$$

- А потом просто $V(s) := \max_a Q(s,a)$.
- Оптимальное $Q^*(s,a)$ тоже нехитро:

$$Q^*(s,a) := \sum_{s' \in S} P_{ss'}^{a} \left(R_{ss'}^{a} + \gamma \max_{a'} Q^*(s,a') \right).$$

Другой вариант

- Пересчёт в предыдущем алгоритме использует информацию от всех состояний–предшественников. Можно сделать другой вариант:

$$Q(s,a) := Q(s,a) + \alpha(r + \gamma \max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a)).$$

- Он работает, если каждая пара (s,a) встречается бесконечное число раз, s' выбирают из распределения $P^a_{ss'}$, а r сэмплируют со средним $R(s,a)$ и ограниченной дисперсией.
- Но ведь на самом деле нам не V и не Q нужно, а оптимальная стратегия...

Улучшение стратегий

- Мы ищем V^π, чтобы улучшить π. Как улучшить π?
- Естественная идея: давайте жадно выбирать a в s как $\arg\max_a Q^\pi(s, a)$ после вычисления Q^π.
- Policy improvement theorem: для π и π', если для всех s

$$Q^\pi(s, \pi'(s)) \geq V^\pi(s),$$

  то π' не хуже π, т.е. $\forall s \; V^{\pi'}(s) \geq V^\pi(s)$.
- Как доказать?

Улучшение стратегий

- Просто будем разворачивать V^π:

$$\begin{aligned} V^\pi \leq & Q^\pi(s, \pi'(s)) = \mathrm{E}_{\pi'}\left[r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1}) \mid s_{t+1} = s\right] \\ \leq & \mathrm{E}_{\pi'}\left[r_{t+1} + \gamma Q^\pi(s_{t+1}), \pi'(s_{t+1})) \mid s_{t+1} = s\right] \\ \leq & \ldots \leq \\ \leq & \mathrm{E}_{\pi'}\left[r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \ldots \mid s_{t+1} = s\right] = V^{\pi'}(s). \end{aligned}$$

Итеративное решение (по стратегиям)

- Ищем оптимальную стратегию итеративным алгоритмом.
- `PolicyIteration` – инициализировать π, потом, пока $\pi \neq \pi'$, повторять:
  - вычислить значения состояний для стратегии π, решив систему линейных уравнений

$$V^{\pi}(s) := \sum_{a} \pi(s,a) \sum_{s' \in S} P^{a}_{ss'}\left(R^{a}_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s')\right);$$

  - улучшить стратегию на каждом состоянии:

$$\pi'(s) := \arg\max_a Q^{\pi}(s,a) = \arg\max_a P^{a}_{ss'}\left(R^{a}_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s')\right);$$

- Почему оно сходится?

Итеративное решение (по стратегиям)

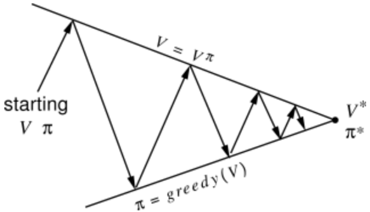
- Сходится, т.к. на каждом шаге строго улучшаем целевую функцию, а всего существует конечное число ($|A|^{|S|}$) стратегий.
- Но, конечно, это медленно, надо V^{π} пересчитывать; проще делать на каждой итерации ровно один шаг пересчёта V^{π}, а потом сразу выбирать жадную стратегию:

$$V_{k+1}(s) := \max_a \sum_{s' \in S} P^a_{ss'} \left(R^a_{ss'} + \gamma V_k(s') \right).$$

- Это называется value iteration.

Итеративное решение (по стратегиям)

- Есть другие похожие методы – их всех объединяет подход, основанный по сути на динамическом программировании. Оно может быть достаточно эффективно даже для больших задач (с трюками, позволяющими не всё пространство исследовать).



Outline

Метод Монте-Карло

- Теперь будем обучать одновременно и модель, и оптимальную стратегию; вознаграждения и переходы не даны.
- Начнём со стохастических алгоритмов (метода Монте-Карло); но начнём опять с простой задачи.
- Как обучить вознаграждения $V^{\pi}(s)$, ожидаемые от состояния s в эпизодической задаче?

Метод Монте-Карло

- Да очень просто: будем накапливать данные и усреднять.
  1. Сгенерировать эпизод по стратегии π.
  2. Для каждого состояния s из эпизода запомнить вознаграждение в конце эпизода.
  3. $V(s) := \mathrm{Avg}(\mathrm{rewards})$.
- Есть тонкая разница между first-visit и every-visit.

Метод Монте-Карло

- Но вообще без модели гораздо удобнее оценивать Q^*.
- Точно так же – но накапливаться будут только некоторые действия, особенно если π детерминированная.
- Возникает проблема, аналогичная многоруким бандитам.
- Но вообще смысл именно такой:

$$\pi_0 \to^E Q^{\pi_0} \to^I \pi_1 \to^E Q^{\pi_1} \to^I \pi_2 \to \ldots$$

Метод Монте-Карло

- Надо гарантировать, что достаточно много эпизодов (легко) и что мы исследуем всё пространство (труднее).
- Monte Carlo ES (exploring starts): инициализировать случайные $Q(s,a)$ и $\pi(s)$, потом повторять:
  1. сгенерировать эпизод по стратегии π;
  2. для каждой пары (s,a) из эпизода запомнить вознаграждение в конце эпизода;
  3. $Q(s,a) := \mathrm{Avg}(\mathrm{rewards})$;
  4. $\pi(s,a) := \arg\max_a Q(s,a)$.

On-policy Monte Carlo

- Monte Carlo ES гарантирует успех, если мы как-то исследуем всё пространство (s, a); как?
- On-policy Monte Carlo – надо держать стратегию мягкой, с исследованием (ϵ-жадную стратегию в каждом s или ещё что-то).

Упражнение. Докажите аналог policy improvement theorem для ϵ-жадных стратегий.

Off-policy Monte Carlo

- Однако удобнее было бы сделать так: следовать ϵ-жадной стратегии, но $Q^*(s, a)$ учить настоящие, а не ϵ-мягкие.
- К счастью, так можно: пусть мы сгенерировали кучу эпизодов по стратегии π', а обучить хотим Q^π и V^π для стратегии π.
- Предположим, что если $\pi(s, a) > 0$, то и $\pi'(s, a) > 0$ (иначе, конечно, не получится).
- Что делать?

Off-policy Monte Carlo

- Надо перевзвесить наблюдения: для n_s попаданий в s с вероятностями p_i и p_i'

$$V(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \frac{p_i(s)}{p_i'(s)} R_i(s)}{\sum_{i=1}^{n_s} \frac{p_i(s)}{p_i'(s)}}.$$

- $p_i(s)$ и $p_i'(s)$ неизвестны, но их отношение можно найти:

$$\frac{p_i(s)}{p_i'(s)} = \frac{\prod_{k=t}^{t_i(s)-1} \pi(s_k, a_k) P_{s_k s_{k+1}}^{a_k}}{\prod_{k=t}^{t_i(s)-1} \pi'(s_k, a_k) P_{s_k s_{k+1}}^{a_k}} = \prod_{k=t}^{t_i(s)-1} \frac{\pi(s_k, a_k)}{\pi'(s_k, a_k)}.$$

Упражнение. А как оценивать $Q(s, a)$?

Off-policy Monte Carlo

- Соответственно, off-policy Monte Carlo control:
  1. выбрать π', сгенерировать эпизод $s_0, a_0, r_1, s_1, a_1, r_2, \ldots, r_T, s_T$;
  2. пусть τ – последнее время, когда $a_\tau \neq \pi(s_\tau)$;
  3. для каждого первого визита в (s, a) в момент $t > \tau$:
     - $w := \prod_{k=t+1}^{T} \frac{1}{\pi'(s_k, a_k)}$;
     - $N(s, a) := N(s, a) + wR_t$;
     - $D(s, a) := D(s, a) + w$;
     - $Q(s, a) := N(s, a)/D(s, a)$;
  4. переопределяем жадную как $\pi(s) := \arg\max_a Q(s, a)$.

TD-обучение

- Общий принцип TD-обучения тот же: давайте обучать состояния на основе обученных нами оценок для последующих состояний.
- $TD(0)$-обучение: инициализировать $V(s)$ и π произвольно, затем на каждом эпизоде обучения:
  1. инициализировать s;
  2. для каждого шага в эпизоде:
     - выбрать a по стратегии π;
     - сделать a, пронаблюдать результат r и следующее состояние s;
     - $V(s) := V(s) + \alpha\left[r + \gamma V(s') - V(s)\right]$;
     - $s := s'$.

TD-обучение

- Смысл в том, чтобы использовать уже обученные закономерности для поиска более глубоких закономерностей.
- В результате обучение получится целенаправленным, обучается гораздо быстрее, чем другие стратегии.

TD-обучение

- $TD(0)$ смотрит на один шаг вперёд. Можно сделать алгоритм, учитывающий много шагов, $TD(\lambda)$:
$$V(u) := V(u) + \alpha(r + \gamma V(s') - V(s))\epsilon(u),$$
применяемый к каждому состоянию u на основе его *eligibility* $\epsilon(u)$.
$$\epsilon(s) = \sum_{k=1}^{t} (\lambda\gamma)^{t-k}[s = s_k].$$
- Eligibility — то, насколько часто это состояние посещалось в недавнем прошлом. Если $\lambda = 0$, $TD(\lambda)$ — это $TD(0)$. Eligibility можно пересчитывать в реальном времени:
$$\epsilon(s) := \gamma\lambda\epsilon(s) + [s = \text{текущему состоянию}].$$

TD-обучение

- Sarsa – on-policy TD-обучение. По каждому данному $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1}, a_{t+1})$ обновить

$$Q(s_t, a_t) := Q(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t) \right].$$

- При этом стратегия должна быть мягкой, например ϵ-жадной с уменьшающимся ϵ.
- Аналогично, Sarsa(λ) обновляет значения на всех парах (s, a) с учётом eligibility traces $\epsilon(s, a)$:

$$Q(s, a) := Q(s, a) + \alpha \left[r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t) \right] \epsilon_t(s, a),$$
$$\epsilon_t(s, a) := \gamma\lambda\epsilon_{t-1}(s, a) + [s = s_t, a = a_t].$$

TD-обучение

- Q-обучение – off-policy TD-обучение. Сразу решаем уравнения Беллмана относительно максимумов:

$$Q(s_t, a_t) := Q(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1} + \gamma \max_a Q(s_{t+1}, a) - Q(s_t, a_t) \right].$$

- Теперь Q напрямую аппроксимирует оптимальную функцию Q^*, независимо от стратегии.
- Аналогично, Q(λ):

$$Q(s, a) := Q(s, a) + \alpha \left[r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q(s_t, a_t) \right] \epsilon_t(s, a$$

$$\epsilon_t(s, a) := \gamma\lambda\epsilon_{t-1}(s, a) + [s = s_t, a = a_t],$$

только теперь ещё надо забывать следы, если мы не следуем стратегии: $\epsilon_t(s, a) := 0$, если $Q(s_t, a_t) \neq \max_a Q(s_t, a)$.

Адаптивный эвристический критик

- Основная идея — пусть один элемент алгоритма ищет стратегию, а другой — функцию значений, и пусть они друг с другом соперничают.
- Адаптивный эвристический критик (adaptive heuristic critic) состоит из *критика* AHC и *компонента обучения с подкреплением* RL.
- На месте RL может быть любой алгоритм обучения с подкреплением для решения задачи о k бандитах.

Адаптивный эвристический критик

- RL максимизирует не прибыль, а значение эвристики v, вычисляемое критиком.
- AHC в это время использует полученное от RL значение для пересчёта ожидаемых значений прибыли от состояний.
- По очереди: фиксируем стратегию π и подсчитываем функцию значений V_π. Затем фиксируем V_π и учим новую стратегию π', которая максимизирует V_π. И так далее.

Адаптивный эвристический критик

- Как АНС выучит V_π по π?
- $\langle s, a, r, s' \rangle$ — *experience tuple* (s — состояние перед переходом, a — действие, r — поощрение, s' — следующее состояние).
- Значение можно выучить по правилу $TD(0)$:

$$V(s) := V(s) + \alpha(r + \gamma V(s') - V(s)).$$

Certainty equivalence

- Можно просто сначала собрать опыт, по нему построить модель, а затем по этой модели вычислять оптимум.
- Недостатки:
  - Нужно проводить какую-то границу между обучением и действием.
  - Сбор данных может быть ужасно неэффективен.
  - Что, если окружающая среда вдруг изменится?
- Идея — одновременно строить модель, по опыту и по модели оптимизировать стратегию.

Dyna

- При подаче на вход experience tuple $\langle s, a, r, s' \rangle$ Dyna работает так:
  - Обновить модель, добавив статистику для перехода из s в s' под действием a и для получения награды за a в состоянии s. Получим $\widehat{T}$ и $\widehat{R}$.
  - Обновить стратегию в состоянии s:
    $$Q(s, a) := \widehat{R}(s, a) + \gamma \sum_{s'} \widehat{P}^{a}_{ss'} \max_{a'} Q(s', a').$$
  - Сделать ещё k обновлений: для k случайно выбранных пар (s_k, a_k) (k произвольное — на сколько ресурсов хватит)
    $$Q(s_k, a_k) := \widehat{R}(s_k, a_k) + \gamma \sum_{s'} \widehat{P}^{a_k}_{s_k s'} \max_{a'} Q(s', a').$$
  - Выбрать a' в s' на основе значений Q (возможно, исправленных стратегией изучения среды).

Уборка по приоритетам

- Dyna хороша, но бесцельна: обновляет случайные пары.
- Алгоритм prioritized sweeping делает то же, но у каждого состояния есть *приоритет*, и для каждого состояния запоминаются предшественники — состояния, из которых можно попасть в это состояние с ненулевой вероятностью.

Уборка по приоритетам

- Алгоритм: точно такой же, как в Dyna, но значения теперь присваиваются состояниям, а не парам (состояние, действие), и вместо k случайных пар мы обновляем значения k наиболее приоритетных следующим образом:
  - Запомнить текущее значение $V_{old} = V(s)$.
  - Обновить
$$V(s) := \max_a \left(\hat{R}(s,a) + \gamma \sum_{s'} \hat{P}^a_{ss'} V(s') \right).$$
  - Выставить состоянию s приоритет 0.
  - Вычислить $\Delta = |V_{old} - V(s)|$.
  - Для каждого состояния, для которого $\hat{P}^a_{us} \neq 0$, увеличить его приоритет на $\Delta \hat{P}^a_{us}$.

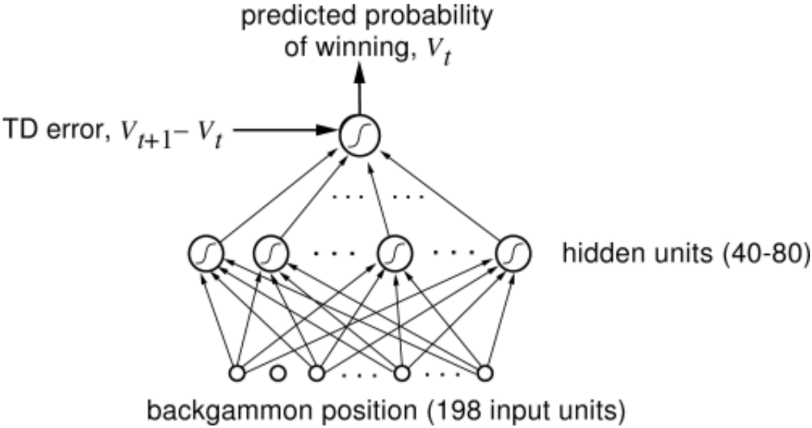
Afterstates

- Часто обучают не по состояниям $V(s)$ и не по парам $Q(s, a)$, а по т.н. *afterstates* – состояниям после действия.
- Это хорошо, когда действия имеют немедленный эффект, а случайный процесс происходит уже потом.
- Крестики-нолики – многие пары приводят к одной и той же позиции.

Как обучить функцию

- Всё, что мы до сих пор говорили, использует значения вида $Q(s, a)$ или $V(s)$, но этих самых состояний обычно астрономическое число.
- Поэтому надо обучать $Q(s, a)$ методами машинного обучения, используя значения, предоставляемые RL-обучением.
- Обычно – нейронные сети.

Пример: архитектура TD-Gammon



Thank you!

Спасибо за внимание!