ЛЕКЦИЯ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Сергей Николенко

1. Разложение периодической функции в ряд Фурье

Рассмотрим преобразование экспоненциальной функции x входного сигнала:

- *непрерывный случай:* $x(t) = e^{st} \to y(t) = \left(\int h(\tau)\, d\tau\right) e^{st}$;
- *дискретный случай:* $x[n] = z^n \to y[t] = \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}\right) z^n$.

Если задана произвольная периодическая функция $x(t)$ с периодом T, то при определенных условиях, накладываемых на функцию, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iw_0 kt}$$

В данном выражении a_k — коэффициенты разложения Фурье, а константа $w_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Учитывая ранее полученную формулу преобразования экспоненциальной функции и разложение функции $x(t)$ в ряд Фурье, в результате применения к входному сигналу преобразования получаем:

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iw_0 kt} \left[a_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-iw_0 k\tau}\, d\tau \right]$$

Коэффициенты a_k ряда Фурье вычисляются по следующей формуле:

$$a_k = \frac{1}{T} \int\limits_T x(\tau) e^{-iw_0 k\tau}\, d\tau$$

2. Сходимость ряда Фурье

Затронем вопрос о сходимости полученного ряда. Ряд Фурье периодической функции $x(t)$ с периодом T является сходящимся, если выполнено:

$$\int\limits_T |x(t)|^2\, dt < +\infty$$

Вообще говоря, можно наложить более строгие условия, а именно, потребовать:

(1) $\int\limits_T |x(t)|\, dt < +\infty$;

(2) исходная функция имеет на периоде T конечное число разрывов;

Законспектировали Борисенко Андрей, Кошевой Александр.

(3) на периоде достигается конечное число максимумов и минимумов.

3. Общий случай непериодической функции

В общем случае функция $x(t)$ входного сигнала не является периодической. Для разложения ее в ряд Фурье нам потребуется произвести ряд дополнительных действий. Построим периодическую функцию $\tilde{x}(t)$ по данной:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & [-T/2,\, T/2) \\ x(t-T), & [T/2,\, 3T/2) \\ \dots \end{cases}$$

Коэффициенты разложения полученной функции $\tilde{x}(t)$ в ряд Фурье имеют вид:

$$a_k = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-iwt}\, dt$$

Учитывая выражения для коэффициентов, получаем ряд Фурье функции $\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = \sum a_k e^{ikw_0 t} = \sum \frac{1}{T} x(iw_0 t) e^{ikw_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum w_0 \underbrace{x(iw_0 k) e^{ikw_0 t}}_{f(w_0 k)}$$

Теперь, устремив период $T \to \infty$, а тем самым $w_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$, получаем интегральную сумму и приходим окончательно к выражению для заданной функции:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(iw) e^{iwt}\, dw.$$

Итак, нами получены формулы для преобразований Фурье.

Прямое преобразование Фурье: $X(iw) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-iwt}\, dt$,

Обратное преобразование Фурье: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(iw) e^{iwt}\, dw$.

4. Теорема Планшереля

Теперь докажем теорему о связи между энергией исходного сигнала и сигнала, полученного в результате применения к нему преобразования Фурье.

Теорема 1 (Планшереля)**.** *Энергия сигнала после его преобразования Фурье сохраняется:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(iw)|^2\, dw$$

Доказательство. Воспользуемся известным тождеством для комплексных чисел:

$$|x(t)|^2 = x(t)\, \overline{x(t)}$$

$$\underline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \overline{x(t)}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(iw)\, \underbrace{e^{iwt} \frac{1}{2\pi} \overline{X}(iw') e^{-iw't}}_{\overline{X} e^{i(w-w')t}} dw\, dw'\, dt$$

Ранее было показано, что значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(w-w')t}\,dt$ равно $\delta(w-w')4\pi^2$. Подставив это выражение в нашу формулу, получим двойной интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(iw)\overline{X}(iw')\delta(w-w')\,dw\,dw' = \underline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(iw)\overline{X}(iw)\,dw}$. Полученное выражение и означает равенство энергий исходного и преобразованного сигналов.

$\square$

Фактически, $X(iw)$ показывает насколько частота w представлена в заданном входном сигнале $x(t)$:

$$X(iw) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-iwt}\,dt$$

5. Примеры

Пример 1

В качестве примера, рассмотрим входной сигнал $x(t) = \sin(t)$. В этом случае:

$$X(iw) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(t)e^{-iwt}\,dt$$

Воспользуемся разложением синуса через экспоненту:

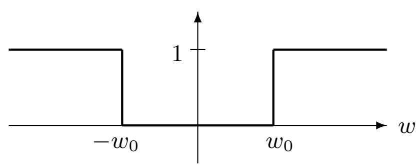
$$\sin(t) = \frac{1}{2i}\left[e^{it} - e^{-it}\right]$$

Получаем выражение $\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(w-1)t}\,dt - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(w+1)t}\,dt$, которое можно переписать с использованием δ-функции: $X(iw) = i\pi\left(\delta(w-1) - \delta(w+1)\right)$.

Полученный результат говорит о том, что у синусоидального сигнала имеется одна частота, зато какая!

Пример 2

Интересный пример применения преобразования Фурье — фильтр низких частот. В данном случае, имея на входе сигнал e^{iwt}, на выходе получаем $H(iw)e^{iwt}$. Нашей задачей является фильтрация низких частот, что достигается выбором функции $H(iw)$ следующего вида:



Таким образом мы отсекаем частоты диапазона $[-w_0,\, w_0]$

Теперь докажем факт о преобразовании Фурье для случая, когда для входного сигнала применяется операция свертки.

Утверждение 1. *Пусть $x = y * z$, тогда $X(iw) = Y(iw)Z(iw)$.*

Доказательство. Применяя прямое преобразование Фурье к функции $X(iw)$:

$$X(iw) = \int\int y(\tau)z(t-\tau)\,d\tau e^{-iwt}\,dt = \int\left[\int z(t-\tau)e^{-w(t-\tau)}\,dt\right]y(\tau)e^{-iw\tau}\,d\tau$$

Замечая, что при вычислении вложенного интеграла τ играет роль константы, а следовательно $d(t-\tau) = dt$, получаем

$$X(iw) = \int z(t)e^{iwt}\,dt\int y(\tau)e^{-iw\tau}\,d\tau$$

Что и означает выполнение доказываемого равенства $X(iw) = Y(iw)Z(iw)$ □

Пример 3

Рассмотрим теперь сглаживание дискретного сигнала. Наша задача преобразовать входной сигнал $x[n]$ в сигнал вида $\frac{1}{3}(x[n-1]+x[n]+x[n+1])$. Функция преобразования в этом случае выглядит следующим образом: $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$, где δ — дельта-функция.

В результате преобразования частота выходного сигнала изменится:

$$H(iw) = \sum_n h[n]e^{-iwn} = \frac{e^{-iw} + 1 + e^{iw}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(w)$$

Мы рассмотрели простейший случай сглаживания дискретного сигнала, в котором в качестве выходного сигнала бралось среднее арифметическое из значений функции в текущий, предыдущий и следующий моменты времени. Полученный результат можно обобщить на случай, когда среднее арифметическое функции берется по некоторому фиксированному отрезку времени $[n-N, n+M]$: $x[n] \to \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} x[n-k]$. То есть при сглаживании мы учитываем текущий, N предыдущих и M последующих моментов времени. В этом случае функция преобразования представима в виде: $h[n] = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M}\delta[n-k]$.

Посмотрим, что произойдет с частотой выходного сигнала:

$$H(iw) = \sum_n h[n]e^{-iwn} = \sum_n\left[\frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M}\delta[n-k]\right]e^{-iwn}.$$

Сумма дельта-функций $\sum_{k=-N}^{M}\delta[n-k]$ отлична от нуля, если $-N \le n \le M$. Для данных значениях n она равна $\frac{1}{N+M+1}$. При других значениях n сумма обращается в 0. Таким образом, наше выражение можно упростить:

$$H(iw) = \frac{1}{N+M+1}\sum_{n=-N}^{M} e^{-iwn}$$

Вынесем за знак суммы $e^{-iw\frac{M-N}{2}}$, что сделает степени слагаемых экспонент симметричными относительно 0:

$$H(iw) = \frac{e^{-iw\frac{M-N}{2}}}{N+M+1}\sum_{n=-N}^{M} e^{-iw(n-\frac{M-N}{2})}$$

Полученную сумму $\sum_{n=-N}^{M} e^{-iw(n-\frac{M-N}{2})}$ можно преобразовать к виду

$$\frac{e^{iw\frac{M+N+1}{2}} - e^{-iw\frac{M+N+1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}iw} - e^{-\frac{1}{2}iw}}.$$

Учитывая данный факт, получаем окончательное выражение для частоты сглаженного сигнала:

$$H(iw) = \frac{e^{-iw\frac{M-N}{2}}}{N+M+1}\frac{\sin w\frac{M+N+1}{2}}{\sin\frac{w}{2}}$$