Основные понятия и определения

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Кто я такой

- Сергей Николенко, аспирант ПОМИ РАН.
- Научные интересы: теория сложности, криптография, высшая алгебра, алгебраическая геометрия, машинное обучение, теория аукционов.
- Email: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Homepage: http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/
- LiveJournal: smartnik

Что такое дизайн механизмов?

- Дизайн механизмов (mechanism design) — это раздел *теории игр*.
- Теория игр изучает взаимодействие между агентами, при котором каждый агент действует пытается выбрать стратегию, максимизирующую его собственную прибыль.
- А дизайн механизмов — это конструктивный подход: как создать такой механизм взаимодействия, при котором эгоистические действия каждого из агентов в сумме приведут к решению, оптимальному с точки зрения общей целевой функции?

Аукционы

- Главный пример дизайна механизмов — аукционы.
- Какая цель? В обычном аукционе:
  - либо организатор пытается максимизировать общую прибыль (social welfare),
  - либо продавец пытается сделать такой аукцион, чтобы продать подороже;
  - кроме того, хочется достичь ситуации, при которой выявляются истинные предпочтения участников (truthfulness);
  - и, конечно, решение должно быть в каком-либо смысле оптимальным и/или устойчивым, иначе оно не сможет реализоваться.

История

- Вообще слово «mechanism» в этом контексте ввёл Лео Гурвиц (Leo Hurwicz).
  - Гурвиц родился в Москве в 1917 году, жил в Польше, но оттуда в 1940, ясное дело, пришлось эмигрировать...
  - В 1960 он сформулировал основные положения теории экономических механизмов, в 1972 сформулировал свойство правдивости; вскоре последовал принцип выявления, и с него-то всё и началось.

История

- Дальше Эрик Маскин (Eric Maskin) начал implementation theory — то есть, собственно, mechanism design: как сделать такой протокол, чтобы он обладал нужными свойствами.
- А потом Роджер Майерсон (Roger Myerson) применил это всё к аукционам и окончательно оформил поле деятельности.

Nobel Prize 2007

- За это им всем троим и дали Нобелевскую премию 2007 года по экономике.
- Сначала, кстати, в 1994 премию дали Нэшу за разработку теории игр, которая, конечно, будет ключевой для всей этой науки.

Реальные применения

- Как известно, интернет-компании (Google, Yahoo) делают почти все свои деньги на рекламе. Реклама же продаётся через систему аукционов, использующую последние достижения дизайна механизмов. Это, наверное, самый близкий нам пример.
- Ebay.
- Общественно полезные работы — нужно максимизировать social welfare, но участники-то всё равно эгоистичные.
- Налогообложение: какую систему налогообложения ввести, чтобы максимизировать доход государства и social welfare?

Реальные применения

- Есть и менее прямые и очевидные примеры применений, например, компьютерные распределённые системы:
  - real-time scheduling: к распределённой системе приходят всё новые и новые задачи (заранее неизвестные), нужно как можно больше задач решить в срок;
  - *Nobel powered* BitTorrent client: как сделать так, чтобы участникам p2p-сети было выгодно делиться файлами, максимизируя при этом суммарную доступность файлов сети?
- Аукционы на радиочастоты (3G auctions).

Что мы будем изучать

- Аукционы: постановка задачи, пара примеров, теорема о выявлении.
- Эффективные и оптимальные аукционы.
- Impossibility results.
- Worst-case аукционы, online аукционы.
- ... :)

Outline

Дилемма заключённого: описание

- Начнём с нескольких ярких примеров, на которых будет видно, что всё это неспроста.
- Дилемма заключённого (prisoner's dilemma) — классический пример из теории игр.
    - двоим заключённым предлагают признаться в преступлении и заложить своего сообщника;
    - реальных доказательств у обвинения нет, поэтому, если оба промолчат, то оба отсидят по полгода за другие грешки;
    - если оба признаются, обоим за примерное поведение дадут по два года;
    - а если один признается, а другой нет, то признавшегося за сотрудничество отпустят, а упорствующему впаяют по полной, лет десять;
    - держать связь заключённые не могут; что делать каждому из них?

Дилемма заключённого: матрица

- Вот какая получается матрица возможных стратегий:

	Промолчать	Сознаться
Промолчать	$(0.5, 0.5)$	$(10, 0)$
Сознаться	$(0, 10)$	$(2, 2)$

- *Вне зависимости* от выбора первого заключённого, второму в любом случае выгоднее признаться!
- Получается, что для каждого из них «Сознаться» — доминантная стратегия, и в результате они будут сидеть по 2 года, а не по 0.5.

Реальный пример

- Две фирмы производят один и тот же продукт (других фирм на рынке этого продукта нет).
- Если рекламы не будет вообще, у них будет одно распределение доходов.
- Если они обе будут активно рекламироваться, то реклама «взаимно сократится», и относительное потребление их продуктов не изменится, а деньги на рекламу будут потрачены.
- Но если одна фирма не будет рекламироваться, а вторая будет, то та, что будет, получит большую прибыль от резко увеличившейся доли рынка.
- Вот совершенно жизненный пример, в котором реально возникает именно дилемма заключённого.

Трагедия общин

- Пример, известный ещё из Фукидида и Аристотеля.
- Он возникает, когда у нескольких игроков на рынке есть некий общий ресурс.
- Выгоды от его использования индивидуальны, а затраты на использование общие, поэтому все пытаются максимизировать своё собственное использование ресурса, и он истощается.

Трагедия общин

- Классическая постановка: на пастбище пасут овец несколько местных овцеводов.
- Пастбище общее и бесплатное, а каждая дополнительная овца приносит овцеводу прибыль.
- Поэтому все начинают разводить всё больше и больше овец, и пастбище окончательно вытаптывается.
- Однако при этом каждый овцевод полностью рационален, потому что для него лично одной дополнительная овца значит гораздо больше, чем дополнительный ущерб пастбищу от одной овцы.

Решение?

- Такие примеры возникают всё время, где есть общие ресурсы, которые трудно разделить: в загрязнении окружающей среды, использовании воды и воздуха, вырубке лесов, охоте, рыболовстве...
- Решение может заключаться только в том, чтобы построить некий общественный механизм (при помощи государства), например механизм налогообложения или квотирования, при котором общий ресурс не истощится.
- Как сделать это максимально эффективно? Это предмет теории механизмов.

Парадокс доллара: постановка

- Это пример того, к чему может привести дизайн хитрых механизмов.
- Рассмотрим такой аукцион: лот — один доллар, участники могут перебивать цены друг друга, давший максимальную цену платит её и получает доллар.
- Но при этом максимальные объявленные цены должны будут уплатить *все* участники аукциона, а не только победитель.

Парадокс доллара: что будет с рациональными участниками

- Первый участник, желая заработать 99 центов, объявляет цену в один цент.
- Второй перебивает её двумя центами, третий — тремя...
- Тут первый решает, что заработать 96 центов куда лучше, чем потерять один, и объявляет цену в 4 цента.
- И так далее; пока всё нормально...

Парадокс доллара: бесславное завершение

- Рано или поздно цена достигнет 98 центов (пусть такую цену дал первый участник).
- Второй участник, желая заработать цент, даёт цену в 99 центов.
- Но для первого даже остаться в нуле гораздо лучше, чем потерять те 98, которые он уже объявлял!
- И он ставит 100 центов за доллар. А второй... ставит 101.

Что произошло?

- Адекватного решения у этого парадокса нет; собственно, и «парадокса» нет, у игры нет равновесия, и игроки могут в конце концов отдать хитрому аукционеру все свои деньги.
- С другой стороны, конечно, «рациональность» игроков в этом аукционе тоже под вопросом: когда игрок решает, что выгоднее — потерять 98 центов или получить доллар за 100 центов, вторая альтернатива не равна нулю, а должна принимать во внимание вероятность того, что его оппонент не остановится и сделает новую ставку... ожидание выигрыша составляет бесконечный расходящийся ряд потерь.

Winner's curse

- Давайте рассмотрим такую простую ситуацию: есть аукцион, есть товар, у каждого участника своё мнение о ценности товара.
- Участники делают ставки, исходя из своих понятий о ценности.
- Выигрывает тот, кто сделал самую большую ставку.
- В этой ситуации мы будем находиться всё время.

Winner's curse

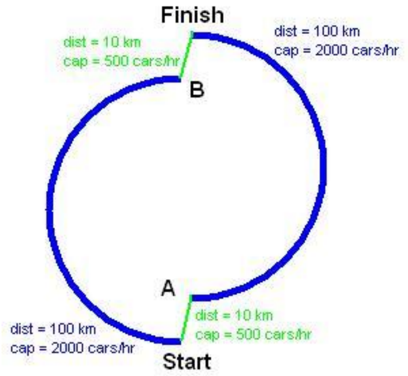
- Давайте предположим, что мнения участников распределены более-менее нормально вокруг истинной стоимости (т.е. точно её участники не знают, есть отклонения и в плюс, и в минус).
- Это нормальная ситуация для, например, аукционов на участки, с которых можно потом качать нефть: информация о количестве нефти общедоступна, но неточна.
- Тогда, понятное дело, отклонения от настоящей цены будут и в плюс, и в минус...

Winner's curse

- ...но победит-то участник с максимальным отклонением в плюс!
- Иначе говоря, если ты победил на этом аукционе, сам факт твоей победы означает, что ты переплатил. Winner's curse.
- Вот такой «парадокс».

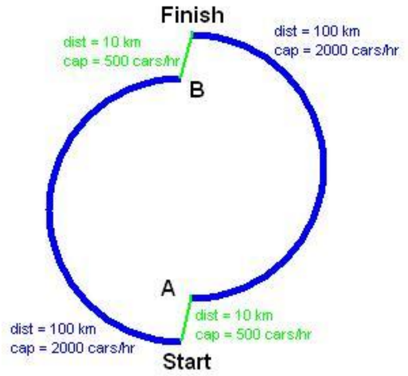
Парадокс Браесса: постановка задачи

- Здесь постановка уже чуть похитрее, но пример тоже очень яркий.
- Рассмотрим две точки, Start и Finish, между которыми есть два пути, проходящие через точки A и B.



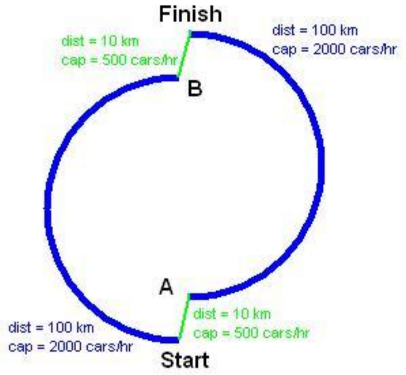
Парадокс Браесса: постановка задачи

- Если машина едет по незаполненной трассе, она едет со скоростью 100 км/ч.
- Если трасса заполнилась, то скорость передвижения падает до $\frac{\text{проп. способность}}{\text{к-во автомобилей}}$.
- Водители всё знают и выбирают оптимальный для себя маршрут.



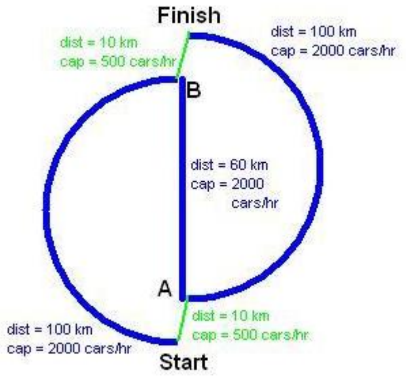
Парадокс Браесса: постановка задачи

- Понятно, что в этой симметричной ситуации водители будут выбирать менее загруженную трассу (когда они заполнятся).
- Пусть проехать должны 2500 машин; из них тогда 1250 поедут по одной дороге, 1250 — по другой.
- Все счастливы, путь каждого водителя занимает 75 минут.



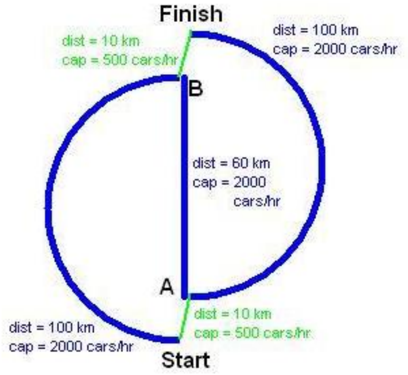
Парадокс Браесса: новая дорога

- Но вдруг государство решило, что надо бы людям помочь, и построило новую короткую дорогу между A и B.
- Эта дорога длиной 60 км супротив 100 км.
- Старые дороги никто не закрывает, у водителей просто появляется новый выбор.



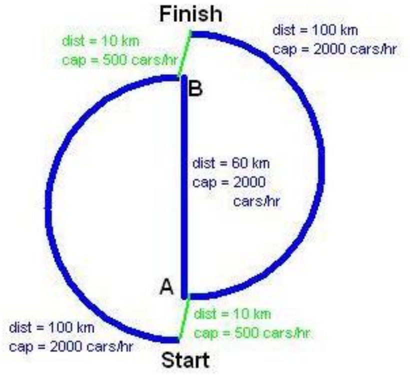
Парадокс Браесса: новая дорога

- Если рассмотреть старое равновесие (1250 на 1250), то при появлении новой дороги по ней ехать будет выгоднее.
- Новое равновесие (когда все пути одинаковы; проверьте!) достигается, когда из 2500 машин 1500 едут по новой дороге, а по старым — по 500.



Парадокс Браесса: новая дорога

- При этом время в пути окажется равным 84 минутам!
- Оказывается, что, просто расширив спектр возможностей водителей, мы перевели систему из более эффективного равновесия в менее эффективное.
- При этом каждый водитель действовал рационально: выбирал, где быстрее.



Парадокс Браесса: что делать

- Новая дорога могла бы быть и на пользу; но только если бы в пунктах Start и A сидели регулировщики и распределяли потоки как надо.
- Это называется price of anarchy: иногда регулируемый рынок действительно функционирует эффективнее, чем управляемый лишь невидимой рукой.

Упражнение. Каково оптимальное время проезда в этой системе с 2500 машинами, если регулировщики работают оптимальным образом?

Outline

Из чего состоит постановка задачи

- В игре участвуют *агенты*.
- У игры есть различные *исходы*.
- У каждого агента есть некий набор *действий*, которые он может предпринимать.

Чуть формальнее

- Во-первых, введём *тип агента* $\theta_i \in \Theta$ для i-го агента (об этом ниже).
- У игры есть набор исходов $\mathcal{O}$, и для каждого агента каждый исход означает какую-то прибыль; так появляется *функция полезности* (utility function) $u_i(o, \theta_i)$ для типа θ_i и исхода o.
- Агент i предпочитает исход o_1 исходу o_2, если $u_i(o_1, \theta_i) > u_i(o_2, \theta_i)$.

Стратегии и функции полезности

- *Стратегия* агента — это план, который полностью описывает его поведение во всех возможных состояниях окружающего мира.
- Через Σ_i будем обозначать множество стратегий агента i, через $s_i(\theta_i) \in \Sigma_i$ — его стратегию.
- Стратегии бывают *чистые* (pure) и *смешанные* (mixed); чистые стратегии жёстко задают поведение в каждом состоянии окружающего мира, смешанные задают распределения вероятностей на множестве возможных действий агента.

Типичный аукционный пример

- В аукционе возрастающей цены состояние мира для агента полностью описывается парой (p, x), где p — текущая цена, а бит x показывает, является ли агент в текущий момент лидером аукциона.
- Пусть у агента есть своя (скрытая) оценка лота v, и он готов заплатить любую сумму, которая была бы меньше v. Тогда т.н. best response strategy $s_{BR}(v)$ описывается следующим образом:

$$b_B R(p, x, v) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 0 \text{ и } p < v, \\ \text{сидеть молча}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь b (от слова bid) — это ставка, которую должен сделать агент.

Функция полезности на стратегиях

- Понятно, что функцию полезности можно с конкретных исходов продолжить на целые стратегии.
- Если N агентов имеют фиксированные стратегии $(s_1, \ldots, s_N)$, то функция полезности

$$u_i(s_1, \ldots, s_N, \theta_i)$$

будет просто равна функции полезности $u_i(o, \theta_i)$ на исходе o, который однозначно задаётся этими стратегиями.

Продолжение примера

- Рассмотрим тот же аукцион, в котором участвуют два агента, и оба исповедуют best response strategy. Для агента 2 ценность лота $v_2 = 1$, для агента 1 она равна v_1.
- Тогда функция полезности для первого агента будет равна

$$u_1(s_{BR,1}(v_1), s_{BR,2}(1)) = \begin{cases} v_1 - (1+\epsilon), & \text{если } v_1 > 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где ϵ — минимальное увеличение цены в аукционе.

О чём дальше пойдёт речь

- Каждый агент пытается максимизировать свою собственную прибыль.
- Он решает задачу оптимизации, добиваясь оптимальной стратегии.
- И в результате система оказывается в каком-нибудь состоянии.
- Мы будем рассматривать возможные определения *равновесного состояния* системы, к которому она может придти после решения каждым агентом своей локальной задачи.

Обозначения

- Обозначим через $\mathrm{s} = (s_1, \dots, s_N)$ профиль всех стратегий участников.
- Через $\mathrm{s}_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$ обозначим стратегии всех участников, *кроме* i.
- Введём также аналогичные обозначения θ и θ_{-i} для типов агентов.

Равновесие Нэша

- Ключевое понятие всей теории игр — *равновесие Нэша* (Nash equilibrium).

Определение

Профиль стратегий $\mathbf{s}$ *находится в равновесии Нэша, если каждый агент при данных стратегиях других агентов выбирает для себя оптимальную стратегию:*

$$\forall s_i' \neq s_i \quad u_i(s_i(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(s_i'(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i).$$

Примеры

- В дилемме заключённого только профиль (Сознаться, Сознаться) находится в равновесии Нэша; преступнику всегда выгоднее сознаться, чем промолчать.
- Бывают игры с несколькими равновесиями Нэша.
- Бывают игры, где нет равновесий Нэша для чистых стратегий.
- Но оно всегда есть в смешанных стратегиях.

Доказательство существования

- Доказательство следует из теоремы Какутани о неподвижной точке.

Теорема

Пусть S — непустое выпуклое компактное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а $\phi : S \to 2^S$ — многозначная функция на S с замкнутым графиком, такая, что множество $\phi(x)$ непусто и замкнуто для всех $x \in S$. Тогда у ϕ есть неподвижная точка: $\exists x : \ x \in \phi(x)$.

Упражнение. Доказать, что из теоремы Какутани следует существование равновесия Нэша в играх со смешанными стратегиями.

Нэш и фон Нейман

- Говорят, в 1949 году Нэш рассказал фон Нейману про равновесие для смешанных стратегий.
- Фон Нейман в своём стиле ответил: «Это, знаете ли, тривиально. Это же всего лишь теорема о неподвижной точке».
- Как мы уже выясняли, потом Нэшу за это дали Нобелевскую премию.

Трудности

- Равновесие Нэша — фундаментальное понятие, но оно не всегда применимо.
- Например, оно много чего предполагает о доступной агентам информации.
- Нужно, чтобы каждый агент знал структуру игры полностью, знал, что другие знают, знал, что все действуют рационально, и, более того, знал, что все выберут одно и то же равновесие Нэша (а их может быть несколько).

Доминантные стратегии

- Агент может и не быть уверен, что все остальные всё знают и непременно выберут равновесие Нэша.
- Но если у него есть *доминантная стратегия*, ему всё равно.

Определение

Стратегия s_i называется доминантной, если она (слабо) максимизирует ожидаемую прибыль агента для всех возможных стратегий других агентов:

$$\forall s_i' \neq s_i, \mathbf{s}_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}, \theta_i) \geq u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}, \theta_i).$$

Важный пример аукциона

- Сейчас мы рассмотрим первый пример нетривиального дизайна механизмов — *аукцион Викри* (Vickrey auction).
- Это аукцион, проводящийся по схеме sealed-bid: участники подают свои заявки в конвертах, потом их вскрывают, и объект продаётся тому, кто предложил самую высокую цену.
- Например, так обычно проводят тендеры.

Sealed-bid highest-price

- Что выгодно делать участнику со скрытой ценностью v, если ему продадут вещь по той цене, которую он запросит?
- Это довольно сложная задача: если его скрытая ценность максимальна из всех участников, ему нужно сделать заявку больше, чем у следующего за ним, но желательно только чуть-чуть больше, чтобы максимизировать свою прибыль.
- В результате на самом деле никому не лучше — и продавец не максимизирует доход, и social welfare тоже страдает.
- Мы потом более подробно проанализируем этот случай.

Sealed-bid second-price

- В этом типе аукциона (который и называется аукционом Викри) по-прежнему продают тому, кто больше предложил... но продают по цене, которую предложил второй сверху участник!
- Оказывается, что в нём участникам выгодно говорить правду о своей скрытой ценности!
- Давайте проверим, что $b_i(v_i) = v_i$ — это действительно доминантная стратегия.

Sealed-bid second-price

- Ожидаемая полезность стратегии $b_i(v_i) = v_i$ равна

$$u_i(b_i, b', v_i) = \begin{cases} v_i - b', & \text{если } b_i > b', \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

  где b' — это наивысшая ставка среди всех остальных агентов.
- Если $b' < v_i$, то оптимальна любая ставка $b_i \geq b'$ (вещь ведь всё равно продадут по цене b').
- Если $b' \geq v_i$, то, опять же, оптимальна любая ставка $b_i \leq v_i$ (всё равно не продадут).
- Ставка $b_i = v_i$ подходит в оба случая и поэтому является доминантной стратегией.

Truthfulness

- Мы только что на пальцах доказали, что в аукционах Викри каждому участнику выгодно говорить правду.
- Это очень важное свойство механизмов — *правдивость* (truthfulness).
- Мы позже увидим, что на самом деле можно ограничиться только правдивыми механизмами (результат контринтуитивный, но доказывается тоже на пальцах — попробуйте!).

Ещё о доминантных стратегиях

- Оказывается, что доминантные стратегии гораздо удобнее для агентов: им уже не надо ничего предполагать о других агентах, они могут смело пользоваться доминантной стратегией.
- Поэтому в дизайне механизмов гораздо приятнее получить механизм с доминантными стратегиями у каждого агента, чем просто равновесие Нэша.

Неполная информация

- Возвращаемся к *типам* агентов; теперь мы предположим, что агент не знает наверняка, каковы типы других агентов, то есть каковы у них функции полезности.
- Но при этом он знает выплаты для каждого возможного типа, и у него есть некоторое априорное распределение $F(\theta)$ на типах для каждого из других агентов.
- И, конечно, он пытается максимизировать математическое ожидание своей прибыли в равновесии со такими же оптимизирующими стратегиями других агентов.

Равновесие по Байесу-Нэшу

Определение

Профиль стратегий $\mathbf{s}$ *находится в равновесии по Байесу-Нэшу (Bayesian-Nash equilibrium), если каждый агент при известном ему распределении* $F(\theta)$ *на типах других агентов выбирает для себя оптимальную стратегию:* $\forall s_i' \neq s_i$

$$\mathbf{E}_{F(\theta)} u_i(s_i(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i) \geq \mathbf{E}_{F(\theta)} u_i(s_i'(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i).$$

- То есть стратегия агента оптимальна по распределению типов других агентов; в одном конкретном эксперименте вполне возможно, что он будет выбирать неоптимальное поведение.

Обсуждение

- Равновесие по Байесу-Нэшу обобщает обычное; оно делает более естественные предположения о знаниях агентов.
- Для каждого фиксированного типа $\bar{\theta}_i$ оно тоже должно быть оптимальным: $\forall s_i' \neq s_i$

$$\mathbf{E}_{F(\theta)}\left[u_i(s_i(\bar{\theta}_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i) \mid \bar{\theta}_i\right] \geq$$
$$\geq \mathbf{E}_{F(\theta)}\left[u_i(s_i'(\bar{\theta}_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i) \mid \bar{\theta}_i\right].$$

- Но у него есть другие недостатки равновесия Нэша: например, оно не единственно.

Переходим к дизайну механизмов

- Поэтому хотя равновесие по Байесу-Нэшу получить лучше, чем обычное, доминантные стратегии всё равно ещё лучше.
- В итоге мы ввели и рассмотрели три типа равновесий, которые могут возникнуть в наших механизмах, поняли, к чему стремиться.
- Теперь переходим собственно к дизайну.

Outline

Суть задачи дизайна механизмов

- Мы хотим построить механизм, при котором то или иное равновесное состояние системы будет оптимальным относительно той или иной цели.
- Для этого нужно сначала определить, какая же у нас цель.

Функция социального выбора

Определение

Функция социального выбора $f : \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N \to \mathcal{O}$ *— это функция, выбирающая тот или иной желаемый результат* $f(\theta)$ *при данных типах* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$.

- Функция социального выбора — это то, чего нам бы хотелось получить от механизма, который мы разрабатываем.
- Но при этом каждый агент будет максимизировать свою собственную прибыль. Надо это примирить.

Механизм

- Теперь наконец можно определить, что же такое *механизм*.

Определение

Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ *состоит из набора стратегий* Σ_i *для каждого агента и функция исходов* $g : \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N \rightarrow \mathcal{O}$, *которое определяет исход, предусмотренный механизмом для данного профиля стратегий* $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_N)$.

Что реализует механизм

- Можно проанализировать тот или иной механизм и понять, где у него точки равновесия.
- При этом может оказаться, что механизм *реализует* ту или иную функцию социального выбора.

Определение

Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_N, g)$ *реализует функцию социального выбора* $f(\theta)$, *если для всех* $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \dots \times \Theta_N$

$$g(s_1^*(\theta_1), \dots, s_N^*(\theta_N)) = f(\theta),$$

где профиль стратегий $(s_1^*, \dots, s_N^*)$ *находится в равновесии по отношению к игре, индуцированной* $\mathcal{M}$.

Что реализует механизм

Определение

Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ *реализует функцию социального выбора* $f(\theta)$, *если для всех* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$

$$g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_N^*(\theta_N)) = f(\theta),$$

где профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_N^*)$ *находится в равновесии по отношению к игре, индуцированной* $\mathcal{M}$.

- Под «равновесием» можно понимать равновесие по Нэшу, по Байесу–Нэшу, по доминантным стратегиям... обычно нас интересует максимально сильное из возможных равновесий.

Может быть, всё просто?

- Давайте попробуем построить тривиальный механизм, который мог бы реализовывать всевозможные функции социального выбора.
- Мы просто спросим у каждого агента, какой у него тип (ответы на этот вопрос будут возможными стратегиями агентов), а потом в качестве функции исходов возьмём функцию социального выбора: $g(\theta) = f(\theta)$.
- Казалось бы, всё работает...

Увы, нет

- ...но ведь агенты не обязаны говорить нам правду!
- Агенты будут максимизировать свой доход, сообщая тот тип, который выгоднее, решая (для байесовского равновесия Нэша) задачу оптимизации

$$\max_{\theta' \in \Theta_i} \mathbf{E}_{\theta_{-i}} u_i(\theta', \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i).$$

- Нам нужно построить механизм так, чтобы решение этой задачи для агентов сошлось с желаемым; в частности, в данном случае нам нужно было бы реализовать *правдивый* механизм, при котором агентам было бы выгодно сообщать свои настоящие типы.
- Один такой пример мы уже разбирали — это был аукцион Викри.

Разные функции социального выбора

- Есть ряд свойств функций социального выбора, которые могут очень помочь нам при дизайне, а также гарантировать много полезных свойств механизмов, их реализующих.
- Сейчас мы их рассмотрим.
- Кроме того, мы введём (естественные) ограничения на агентов.

Оптимальность по Парето

Определение

Функция социального выбора $f(\theta)$ *называется оптимальной по Парето, если для всякого набора типов* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_i)$ *и всякого исхода* $o' \neq f(\theta)$

$$u_i(o', \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i) \quad \Rightarrow \quad \exists j : \; u_j(o', \theta_j) < u_j(f(\theta), \theta_j).$$

- Оптимальность по Парето значит, что если кому-то стало лучше, чем в предлагаемом функцией f варианте, то кому-то другому обязательно стало хуже.
- То есть нельзя монотонно улучшить дела сразу всех агентов.

Пример

- Рассмотрим множество исходов $\mathcal{O} = \{x, y, z\}$ и предположим, что действуют два агента.
- У первого агента ровно один тип, $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, и у этого типа структура предпочтений такова: $x >_1 y >_1 z$.
- А у второго агента два разных типа $\Theta_2 = \{\theta_2^a, \theta_2^b\}$, и вот их структура предпочтений:

$$z >_2^a y >_2^a x, \quad y >_3^b x >_3^b z.$$

Пример

- Мы пытаемся реализовать эффективную по Парето (проверьте!) функцию социального выбора:

$$f(\theta_1, \theta_2^a) = y, \qquad f(\theta_1, \theta_2^b) = x.$$

- Если мы захотим просто спросить у каждого агента его тип, второму будет выгодно соврать: при типе θ_2^b ему будет выгодно сказать, что он θ_2^a и получить в результате исход y, а не x.

Оптимальность по Парето для механизмов

- Можно теперь ввести вполне естественное определение оптимального механизма.

Определение

Механизм называется оптимальным по Парето, если он реализует оптимальную по Парето функцию социального выбора.

Ex post vs. ex ante

- Это определение на самом деле предполагает, что исход окажется оптимальным по Парето уже для конкретных типов агентов, в итоге, апостериори, *ex post*.
- Можно рассматривать оптимальность по Парето *ex ante*, когда нет исхода, который бы *в ожидании* строго предпочёл один агент и нестрого — все остальные.
- Получится более слабое определение.

Время в дизайне механизмов

- Чуть отвлечёмся и обобщим предыдущий разговор.
- Вообще говоря, в литературе о дизайне механизмов есть три разных временны́х постановки.

Время в дизайне механизмов

- Ex ante — до выбрасывания исходов. Ex ante агенты знают только распределения (все, включая своё собственное). Информация у всех агентов одинаковая.
- Interim — после выбрасывания исходов, для каждого агента. То есть ситуация рассматривается с точки зрения одного агента, который уже знает свой тип, но не знает типы других агентов (а распределения знает). Информация теперь у агентов разная — каждый знает свой тип.
- Ex post — после того, как типы всех агентов стали известны.

Время в дизайне механизмов

- Иначе говоря, о равновесиях или ограничениях можно говорить в трёх случаях.
- Ex ante — в терминах распределений типов агентов.
- Interim — в терминах распределений типов агентов и одного конкретного типа одного агента.
- Ex post — в терминах вектора типов всех агентов.

Квазилинейные агенты

Определение

Квазилинейная функция полезности агента i с типом θ_i имеет вид

$$u_i(o, \theta_i) = v_i(a, \theta_i) - p_i,$$

где исход o определяет выбор $a \in \mathcal{K}$ из дискретного множества $\mathcal{K}$ и выплату p_i, производимую агентом.

Агенты с квазилинейными преференциями

- У агента с квазилинейными преференциями есть *функция оценки* (valuation function) $v_i(a)$, $a \in \mathcal{K}$.
- Например, в аукционе, где продаётся одна вещь, $\mathcal{K} = \{0, 1\}$ — агент либо получит эту вещь, либо не получит.
- А p_i в этом случае — выплата агента продавцу.
- Это достаточно естественное предположение в случае аукциона.

Агенты, нейтральные к риску

- Есть ещё одно предположение, которое в жизни часто не выполняется.
- Мы для простоты предполагаем, что агенты нейтральны к риску (risk-neutral agents).
- То есть если агент может получить возможность с вероятностью p получить вещь ценой в \$100, то он радостно заплатит за это $\$100p$.
- В жизни часто встречаются осторожные агенты (risk-averse agents).
- Позже мы их рассмотрим и увидим, что меняется в этом случае.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage: http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.