Комбинаторные аукционы

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Ситуация

- Вспомним ещё раз постановку задачи дизайна аукциона.
- Есть агенты, у каждого агента i есть своя внутренняя цена x_i.
- Если агент i проигрывает, его доход равен 0, иначе он равен $x_i - p$, где p — цена, которую он должен заплатить.

Аукционы Викри

- Мы уже знаем, что в такой ситуации хорош аукцион Викри — аукцион второй цены.
- Самое главное для него то, что он правдив, причём в доминантных стратегиях.
- Причём его правдивость гарантирована даже вот в каком смысле: для каждой ставки $b_i \neq x_i$ можно найти такое множество ставок $\mathbf{b}_{-i}$ других агентов, что агент i строго потеряет деньги по сравнению с $b_i = x_i$.

Упражнение. Докажите это.

- А ещё он рационален.

Эффективные аукционы

- d_i — это то, сколько мы кому продаём; $\sum_i d_i = 1$.
- Эффективный аукцион — это на самом деле аукцион, который максимизирует

$$\sum_i d_i x_i \text{ при условии } \sum_i d_i = 1.$$

- Если продаём одну вещь, это просто значит отдать её тому, кому нужнее всех. Аукцион Викри так и делает.

Вычислительно эффективные аукционы

- Есть и ещё одна важная деталь.
- Аукцион Викри можно реализовать за полиномиальное время.
- Если бы это было не так, то ничего бы не получилось.
- И ещё: аукцион Викри не делает предположений о структуре x_i; личные ценности могут быть любыми, даже не обязательно ограниченными сверху.

Четыре свойства

- Итак, аукцион Викри удовлетворяет четырём свойствам хорошего аукциона:
  1. Он правдив и рационален.
  2. Он эффективен — максимизирует общее счастье.
  3. Он работает с любыми ценностями x_i.
  4. Он реализуем за полиномиальное время.
- Сейчас мы перейдём в более общую ситуацию и увидим, что там достичь всех четырёх целей сразу уже не получится...

Обобщение

- Мы рассматривали аукцион с одной вещью.
- Теперь давайте попробуем продавать несколько вещей сразу.
- Как нам обобщать аукцион Викри на такую ситуацию?

По одной

- Можно было бы продавать вещи по одной, по очереди.
- Это работает, но только тогда, когда вещи независимы.
- А на самом деле они не обязательно независимы.

Complements and substitutes

- Вещи могут дополнять друг друга (complements): набор из двух вещей стоит больше, чем сумма стоимостей.
- Или, наоборот, взаимозаменыемы (substitutes): набор из двух вещей стоит меньше, чем сумма стоимостей.
- Попробуйте привести примеры.

Реальный пример

- Реальный пример, где всё это применяется — окна взлёта и посадки в аэропортах.
- Две возможности взлететь в одном аэропорту примерно в одно время — это substitutes.
- А взлёт в одном аэропорту и посадка через соответствующее время в другом — это complements.
- Аэропортам надо продавать эти слоты авиалиниям — посредством аукционов.

Формально

- Пусть у нас есть множество S продаваемых вещей.
- Скрытая ценность (valuation) v_i игрока i — это в данном случае будет функция из множества 2^S в вещественные числа.
- То есть игрок знает свою скрытую ценность для любого множества вещей.
- Разумные предположения: $v_i(\emptyset) = 0$, $v_i(S') \geq v_i(S)$ при $S' \supseteq S$ (монотонность).

Победители

- В комбинаторном аукционе может быть несколько победителей: одним одно продадут, другим другое.
- Но по-прежнему польза для игрока равна $v_i(T_i) - p_i$, где T_i — это множество проданных ему вещей.
- Эффективные механизмы максимизируют $\sum_{i=1}^{N} v_i(T_i)$.

Аукционы Vickrey-Clarke-Groves

- У нас была более общая конструкция, у которой была масса полезных свойств.
- Это были аукционы Vickrey-Clarke-Groves.
- Как они выглядят в комбинаторном случае?

Аукционы Vickrey-Clarke-Groves

- Каждый игрок i подаёт свою ставку $b_i(T)$ для каждого $T \subseteq S$.
- Центр выбирает размещение $(T_1^*, \ldots, T_N^*)$, которое максимизирует
$$\sum_{i=1}^{N} b_i(T_i)$$
по всем допустимым размещениям (т.е. тем, где $T_i \cap T_j = \emptyset$).
- Берёт с каждого участника i подходящую цену p_i (об этом ниже).

Аукционы Vickrey-Clarke-Groves

- Даже без конкретных цен легко доказать, что VCG эффективен и работает с любыми ценностями v_i (это мы уже много раз делали).
- А цена, взятая с игрока i, — это суммарный ущерб, понесённый другими игроками от присутствия i:

$$p_i = \left(\max_{\{T_j\}_{j\neq i}} \sum_{j\neq i} b_j(T_j)\right) - \sum_{j\neq i} b_j(T_j^*),$$

  т.е. разница между общим счастьем в оптимальном размещении без i и нынешним общим счастьем других игроков.
- Мы уже доказывали, что VCG правдив и рационален (правда, бюджет не сходится, но это сейчас дело второе).

Аукционы Vickrey-Clarke-Groves

- Но вот с вычислительной эффективностью... мда.
- Начнём с того, что каждый игрок должен подать ставки на каждое подмножество 2^S, т.е. 2^M чисел, если в аукционе M предметов.
- Максимизация по всем размещениям тоже не выглядит простой задачей.
- А нам бы хотелось полиномиальный алгоритм, и от N, и от M.
- Этим мы и будем заниматься.

Outline

1. Постановка задачи
   - Четыре свойства хорошего аукциона
   - Комбинаторные аукционы
   - Аукционы VCG
2. Полиномиальные аукционы
   - Целеустремлённые агенты
   - Приближённый алгоритм для WD

Как ослабить условие 3

- Оказывается, условие 3 хорошего алгоритма на самом деле очень важно.
- Если его оставить в общем виде, полиномиальных аукционов не найти (мы доказывали, что VCG единственны в своём роде, т.е. все остальные им эквивалентны).
- Если его максимально ослабить — позволить агентам иметь только отдельные ценности на каждую вещь — то можно сделать полиномиальный аукцион, запуская аукцион Викри поочерёдно для каждой вещи.
- Давайте теперь ослабим его, но не совсем.

Целеустремлённые агенты

- Single-minded buyers просто хотят один конкретный набор вещей, а остальное им по фигу.
- Иначе говоря, агент i целеустремлённый, если существует такое множество $A_i \subseteq S$ и число α_i, что

$$v_i(T_i) = \begin{cases} \alpha_i, & T_i \supseteq A_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- То есть агенту просто нужно A_i.

Почему именно так

- Во-первых, такое ослабление сохраняет возможность моделировать complements.
- Во-вторых, такое ослабление позволяет агенту за полиномиальное время полностью обозначить свои предпочтения — достаточно задать A_i и α_i.

Полиномиальные аукционы для таких агентов

- Вопрос: можно ли сделать полиномиальный хороший аукцион для целеустремлённых агентов?
- Мы уже разобрались с первый шагом VCG — ставки можно сделать полиномиально.

Полиномиальные аукционы для таких агентов

- Вопрос: можно ли сделать полиномиальный хороший аукцион для целеустремлённых агентов?
- Мы уже разобрались с первый шагом VCG — ставки можно сделать полиномиально.
- Конечно, всё равно не получится. Второй шаг VCG — определение победителя (winner determination, WD).
- Задача WD для VCG даже с целеустремлёнными агентами NP-трудна.
- Для этого мы сведём к ней WIS — Weighted Independent Set.

Полиномиальные аукционы для таких агентов

- Weighted Independent Set — это задача, в которой дан граф $G = (V, E)$, и вес w_v для каждой вершины v.
- Требуется найти множество вершин, в котором нет соседей и для которого максимизируется суммарный вес $\sum_i v_i$.
- Эту задачу мы сведём к WD: рассмотрим множество вещей, равное множеству рёбер E, а игроки — вершины графа V.
- Для вершины v мы рассмотрим $\alpha_v = w_v$, а A_v — множество соседей v.
- Тогда максимизируя размещение, мы тем самым найдём максимальный набор независимых вершин.

Ещё о WIS

- WIS — задача не просто NP-трудная, а очень NP-трудная. :)
- То есть она даже не приближается полиномиальными алгоритмами.
- Если NP$\not\subseteq$ZPP, то для всякого $\epsilon > 0$ не существует $O(n^{1-\epsilon})$-приближённого алгоритма для WIS, где n — число вершин в графе.

Ещё о WIS

- Если NP$\not\subseteq$ZPP, то для всякого $\epsilon > 0$ не существует $O(n^{1-\epsilon})$-приближённого алгоритма для WIS, где n — число вершин в графе.
- Следствие: для всякого $\epsilon > 0$ не существует $O(M^{\frac{1}{2}-\epsilon})$-оптимального алгоритма для WD, где M — количество вещей.
- Иначе говоря, даже самый лучший полиномиальный алгоритм сможет распределить не лучше, чем в $O(\sqrt{M})$ раз хуже оптимума.
- Печально, но ничего не поделаешь.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Мы сейчас построим аукцион и докажем, что он правдивый, рациональный, полиномиальный, работает с целеустремлёнными агентами, и распределяет $O(\sqrt{M})$-близко к оптимуму.
- Для начала не будем устанавливать выплаты, а просто решим такую задачу: по $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_N, \alpha_N)$ определить размещение, максимизирующее суммарную ценность $\sum_{i \in I} \alpha_i$?

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Наш алгоритм будет жадным, и будет комбинацией двух алгоритмов, каждого из которых недостаточно.
- Первый компонент: отсортируем ставки по уменьшению α_i и будем их жадно удовлетворять.
- Приведите плохой пример (на котором он будет аппроксимировать с константой $O(M)$, а не $O(\sqrt{M})$).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Рассмотрим M вещей $S = \{s_1, \ldots, s_M\}$ и $N = M + 1$ игрока.
- $A_1 = S$, $\alpha_1 = 1 + \epsilon$; для $i > 1$ $A_i = \{s_i\}$, $\alpha_i = 1$.
- Тогда мы получим $1 + \epsilon$ вместо m. Это $O(m)$-плохо.
- Проблема: этот алгоритм берёт большие заявки, не сравнивая их с суммой маленьких.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Вторая попытка: отсортируем ставки в порядке убывания $\frac{\alpha_i}{|A_i|}$ (по убыванию средней стоимости одной вещи), а дальше тоже будем действовать жадно.
- В предыдущем примере он достигнет успеха.
- Какой будет для него плохой пример?

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- $A_1 = S$, $\alpha_1 = M - \epsilon$; $A_2 = \{s_1\}$, $\alpha_2 = 1$.
- Тогда наш алгоритм выберет A_2, а на A_1 вещей не хватит.
- Проблема: этот алгоритм недооценивает большие ставки, если они включают в себя много вещей, на которые нет других заявок.
- Что же делать?

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Алгоритм LOS: Lehmann, O'Callaghan, Shoham.
- Мы сортируем ставки по убыванию $\frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}}$.

Упражнение. Модифицируйте вышеприведённые примеры так, чтобы получилось, что этот алгоритм не более чем $\sqrt{m}$-приближённый.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Теперь докажем, что он действительно $\sqrt{m}$-приближённый.
- Обозначим через X множество ставок, которые выберет LOS, а через X^* — оптимальное множество.
- Надо доказать, что $\sum_{i^* \in X^*} \alpha_{i^*} \le \sqrt{m} \sum_{i \in X} \alpha_i$.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Будем говорить, что ставка $i \in X$ блокирует ставку $i^* \in X^*$, если A_i пересекается с A_{i^*}.
- Если i блокирует i^* и $i \neq i^*$, то обе ставки одновременно не получится удовлетворить.
- Обозначим через $F_i \subseteq X^*$ множество ставок, которые *впервые* заблокированы ставкой $i \in X$.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Если $i^* \in F_i$, то к моменту выбора i ставка i^* ещё не была заблокирована, т.е. уж точно $\forall i^* \in F_i$

$$\frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \geq \frac{\alpha_{i^*}}{\sqrt{|A_{i^*}|}}.$$

- Кроме того, каждая i^* лежит ровно в одном F_i (сама i тоже лежит в F_i).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Иначе говоря, F_i — это partition множества X^*. В частности,
$$\sum_{i^* \in X^*} \alpha_i^* = \sum_{i \in X} \sum_{i^* \in F_i} \alpha_{i^*}.$$
- Поэтому можно рассматривать каждую ставку $i \in X$ по отдельности, а потом просуммировать общую оценку на качество.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Рассмотрим $i \in X$. Т.к. $\frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \geq \frac{\alpha_{i*}}{\sqrt{|A_{i*}|}}$,

$$\sum_{i* \in F_i} \alpha_{i*} \leq \frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \left(\sum_{i* \in F_i} \sqrt{|A_{i*}|} \right).$$

- Поскольку оптимальное решение удовлетворяет всем ставкам из F_i, $\sum_{i* \in F_i} |A_{i*}| \leq m$.

Упражнение. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}$. Это легко видеть и так, но из каких более общих фактов о функции $\sqrt{\cdot}$ это следует?

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: распределение вещей

- Значит,
$$\sum_{i^* \in F_i} \alpha_{i^*} \leq \frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \sqrt{|F_i|}\sqrt{m}.$$
- Но поскольку ставка i блокирует все ставки F_i, и ставки в F_i не пересекаются, то в худшем случае одна вещь из i блокирует одну ставку из F_i, т.е. $|F_i| \leq |A_i|$. Значит,
$$\sum_{i^* \in F_i} \alpha_{i^*} \leq \sqrt{m}\alpha_i.$$

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Мы построили $O(\sqrt{m})$-приближённый алгоритм поиска эффективного распределения.
- Теперь нужно определить выплаты так, чтобы аукцион стал правдивым.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Разумная идея: давайте используем VCG.
- Сначала все говорят A_i и α_i, потом мы определяем распределение LOS'ом, а потом игрок i платит цену, равную ущербу других игроков от его присутствия.
- Будет ли такой аукцион правдивым? рациональным?

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Рассмотрим тот самый модифицированный пример: у первого игрока $A_1 = S$, $\alpha_1 = \sqrt{m} + \epsilon$. У остальных $A_i = \{s_i\}$, $\alpha_i = 1$.
- LOS удовлетворит первую ставку. Но без неё будут удовлетворены все остальные!
- Значит, первый игрок причинил другим вреда аж на целый m.
- Но он ставил-то всего $\sqrt{m}$, и его участие получается нерациональным.
- А значит, и правдивости не будет (он мог поставить 0 и получить доход 0).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Определение: ставка i *уникально блокирует* (u-blocks) ставку j, если после удаления i из входа LOS удовлетворяет j, а так — вместо j удовлетворяет i.
- Ценовая политика: брать столько, сколько была наивысшая ставка, которую выигравшая ставка u-блокирует. Формально:
  - Если агент проигрывает или его ставка никого не u-блокирует, берём 0.
  - Если агент выигрывает, и ставка (B_j, b_j) — первая (по порядку, определённому LOS) ставка, которую его ставка (B_i, b_i) u-блокирует, то берём

$$p_i = \frac{b_j}{\sqrt{|B_j|}}\sqrt{|B_i|}.$$

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Во-первых, правдивые агенты рациональны (т.е. у них неотрицательный доход).
- Это потому, что если (B_i, b_i) u-блокирует (B_j, b_j), то (B_j, b_j) позже по LOS-порядку. Значит,

$$\frac{b_i}{\sqrt{|B_i|}} \geq \frac{b_j}{\sqrt{|B_j|}},$$

и $b_i \geq p_i$.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Правдивость похитрее будет. Мы докажем сначала, что если агент что-то выигрывает от ложной ставки (B_i, b_i), то он выиграет не меньше от наполовину правдивой ставки (A_i, b_i).
- Во-первых, $B_i \supseteq A_i$, иначе у i никогда не будет положительного дохода.
- Значит, по LOS-порядку (A_i, b_i) идёт раньше (B_i, b_i) (или так же, если $A_i = B_i$).
- Значит, если LOS удовлетворил B_i, то A_i он тоже удовлетворил (строгое подмножество, и идёт раньше по порядку).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Как смена B_i на A_i влияет на цену? Во-первых, уменьшается $\sqrt{|B_i|}$ — это хорошо.
- Во-вторых, первая u-блокируемая ставка может измениться (например, на (B_k, b_k)).

Упражнение. Доказать, что по LOS-порядку (B_k, b_k) может идти только после (B_j, b_j), т.е. может только уменьшить первый сомножитель цены p_i.

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Теперь закончим доказательство.
- Пусть от (A_i, b_i) дохода больше, чем от (A_i, α_i).
- Обозначим $\mathcal{B}_{-i}$ набор остальных ставок, $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}_{-i} \cup \{(A_i, \alpha_i)\}$, $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_{-i} \cup \{(A_i, b_i)\}$.
- Можно предполагать, что LOS удовлетворяет ставку (A_i, b_i) на входе $\mathcal{B}_F$ (иначе откуда прибыль).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Первый случай: $b_i < \alpha_i$. (A_i, b_i) удовлетворена, а (A_i, α_i) раньше (т.к. $b_i < \alpha_i$); значит, её бы тоже удовлетворили.
- Пусть (B_j, b_j) — первая ставка, u-блокированная (A_i, b_i). Надо доказать, что (A_i, α_i) не u-блокирует ставки раньше, чем (B_j, b_j).
- Пусть, напротив, первая u-блокированная ставка (B_k, b_k) предшествует (B_j, b_j) в LOS-порядке.
- По определению u-блокирования, LOS на входе $\mathcal{B}_{-i}$ удовлетворяет (B_k, b_k).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Но если (A_i, b_i) идёт после (B_k, b_k) в LOS-порядке, то (B_k, b_k) удовлетворяется и на входе $\mathcal{B}_F$ (т.к. LOS принимает одни и те же решения вплоть до появления (A_i, b_i)).
- Но A_i и B_k пересекаются (потому что B_k — первая u-блокированная ставка).
- И к тому же (A_i, b_i) удовлетворяется LOS'ом на входе $\mathcal{B}_F$.
- Значит, в LOS-порядке (A_i, b_i) идёт раньше (иначе его не смогли бы удовлетворить, т.к. уже удовлетворили (B_k, b_k)).

$O(\sqrt{M})$-приближённый аукцион: выплаты

- Но тогда получается, что (A_i, b_i) u-блокирует (B_k, b_k), а это противоречит тому, что (B_k, b_k) предшествует первой заблокированной (B_j, b_j).
- Случай, когда $b_i > \alpha_i$, разбирается аналогично — упражнение.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
  http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.