Принцип взаимосвязи и асимметрии

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Постановка

- Продолжаем в том же контексте.
- Сейчас будем общий принцип выводить, поэтому чуть обобщим.
- Для аукциона A обозначим β^A его равновесие.
- Через $W^A(z, x)$ обозначим ожидаемую цену, которую платит агент 1, если он является победителем, получает сигнал x и ставит при этом $\beta^A(z)$ (то есть ставит так, как будто получил z и применил β^A).

Примеры

- В аукционе первой цены
$$W^I(z,x) = \beta^I(z).$$
- В аукционе второй цены
$$W^{II}(z,x) = \mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < z].$$
- Обозначим ещё $W_2^A(z,x)$ частную производную функции $W^A(\cdot,\cdot)$ по второму аргументу, вычисленную в точке (z,x).

Принцип взаимосвязи

Теорема

Пусть A и B — два аукциона, в которых побеждает наивысшая ставка, и платит только победитель. Пусть также в каждом есть своё симметричное и возрастающее равновесие, причём:

- *для всех x $W_2^A(x, x) \geq W_2^B(x, x)$;*
- $W^A(0, 0) = 0 = W^B(0, 0)$.

Тогда ожидаемый доход аукциона A не меньше ожидаемого дохода аукциона B.

Доказательство

- Начнём с аукциона A. Пусть все следуют β^A, а первый ставит $\beta^A(z)$.
- Вероятность его победы $G(z|x) = \Pr[Y_1 < z|X_1 = x]$.
- Значит, каждый агент в A максимизирует

$$\int_0^z v(x,y)g(y|x)dy - G(z|x)W^a(z,x).$$

Доказательство

- В равновесии оптимально брать $z = x$, и соответствующее условие:

$$g(x|x)v(x,x) - g(x|x)W^a(x,x) - G(x|x)W_1^A(x,x) = 0.$$

$$W_1^A(x,x) = \frac{g(x|x)}{G(x|x)}v(x,x) - \frac{g(x|x)}{G(x|x)}W^A(x,x).$$

- Аналогично,

$$W_1^B(x,x) = \frac{g(x|x)}{G(x|x)}v(x,x) - \frac{g(x|x)}{G(x|x)}W^B(x,x).$$

- Значит,

$$W_1^A(x,x) - W_1^B(x,x) = -\frac{g(x|x)}{G(x|x)}\left(W^A(x,x) - W^B(x,x)\right).$$

Доказательство

- Определим

$$\Delta(x) = W^A(x,x) - W^B(x,x).$$

- Тогда

$$\Delta'(x) = (W_1^A(x,x) - W_1^B(x,x)) + (W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x)).$$

- В итоге получается

$$\Delta'(x) = -\frac{g(x|x)}{G(x|x)}\Delta(x) + \left(W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x)\right).$$

Доказательство

- $\Delta'(x) = -\frac{g(x|x)}{G(x|x)}\Delta(x) + \left(W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x)\right)$.
- По предположению теоремы, $W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x) \geq 0$.
- Значит, если $\Delta(x) < 0$, то $\Delta'(x) \geq 0$.
- Более того, $\Delta(0) = 0$.
- Значит, для всех x $\Delta(x) \geq 0$.

Первая цена против второй цены

- Принцип взаимосвязи можно применить, например, к сравнению аукционов.
- $W^I(z, x) = \beta^I(z)$.
- Это значит, что $W_2^I(x, x) = 0$ для всех x.

Первая цена против второй цены

- $W^{II}(z, x) = \mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1) | X_1 = x, Y_1 < z]$.
- Поскольку β^{II} возрастает, то, по аффилированности, $W_2^{II}(x, x) \geq 0$.
- Значит, доход от второй цены не меньше дохода от первой цены.

Принцип эквивалентности доходности

- Принцип эквивалентности доходности — это, конечно, частный случай.
- Если сигналы независимы, то $W^A(z, x)$ не зависит от x.
- Тогда $W_2^A(z, x) = 0$ для любого аукциона, и доходности совпадают.

Постановка

- Предположим, что продавец кое-что знает. Какой-то сигнал S.
- То есть теперь $V_i = v_i(S, X_1, \ldots, X_N)$.
- В симметричном случае — $v_i(S, \mathbf{X}) = u(S, X_i, \mathbf{X}_{-i})$.
- Предположим, $S, X_1, \ldots, X_N$ аффилированы и распределены по плотности p, которая симметрична по последним N аргументам.

Если нету публичной информации

- Если продавец свой сигнал не сообщает, то его можно выинтегрировать из всех выражений.
- И просто всё получится как раньше:

$$v(x, y) = \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 = y].$$

Если есть

- А вот если есть, то другое дело. Давайте предположим, что продавец просто всегда сообщает свой сигнал. Тогда

$$\hat{v}(s,x,y) = \mathbf{E}[V_1 | S = s, X_1 = x, Y_1 = y],$$

  ожидание ценности агента 1 для публичного сигнала s, приватного сигнала x и наибольшего из остальных y.
- По симметрии, эти функции одинаковы для всех агентов; по аффилированности, $\hat{v}$ возрастает; кроме того, $\hat{v}(0,0,0) = 0$.
- Соответственно,

$$v(x,y) = \mathbf{E}[\hat{v}(s,x,y) | X_1 = x, Y_1 = y].$$

Информация и аукцион первой цены

- Мы будем рассматривать два разных аукциона — где говорят S и где не говорят.
- Оба — первой цены.
- Когда не говорят, всё как раньше: $\beta = \beta^I$, $W^I(z, x) = \beta(z)$, $W_2^I(z, x) = 0$.

Информация и аукцион первой цены

- Когда говорят, получается равновесная стратегия $\widehat{\beta}(S, X_i)$, возрастающая от обеих переменных.
- И тогда ожидаемый доход победителя с сигналом x и ставкой как будто получил z:

$$\widehat{W}^1(z, x) = \mathbf{E}[\widehat{\beta}(S, z)|X_1 = x].$$

- А поскольку S и X_1 аффилированы, $\widehat{W}^1_2(z, x) \geq 0$.

Информация и аукцион первой цены

- Получается, что $\widehat{W}_2^1(z,x) \geq 0$, а $W_2^I(z,x) = 0$.
- То есть продавцу всегда выгодно сообщать имеющуюся у него информацию.
- Замечание: надо ещё проверить, что $\widehat{\beta}$ действительно существует. Это делается как обычно, мы уж не будем.

Информация и аукцион первой цены

- То же самое верно для аукциона второй цены и для английского аукциона.
- Рассуждения практически те же самые.

Outline

Асимметрия

- Мы всё время предполагали, что агенты симметричные.
- И у нас получалась мощная и элегантная теория, всё сходилось, всё было хорошо.
- Сначала аукционы вообще были эквивалентны, а сейчас они выстроились соответственно своим $W_2^A(z, x)$.
- Но ведь не всегда агенты симметричны. Что произойдёт?

Ранжирование аукционов не работает

- А произойдёт много всякой ерунды.
- Мы там говорили, что в английском аукционе доход не меньше, чем в аукционе второй цены.
- Давайте приведём пример, в котором это не так.

Ранжирование аукционов не работает

- В примере будут три агента. У них такие функции полезности:
$$v_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,$$
$$v_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,$$
$$v_3(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$
- Первые два «делятся», а третий отдельно от них.
- Также предположим, что X_1, X_2, X_3 распределены независимо и равномерно на $[0, 1]$.

Ранжирование аукционов не работает

- Для третьего игрока доминантная стратегия — говорить правду (её доход частный).
- Пусть β — непрерывная возрастающая стратегия игроков 1 и 2 (они симметричны).
- И давайте предположим, что $\beta(x_i) = kx_i$, $k > 0$ — константа.

Ранжирование аукционов не работает

- Если $\beta(x_2) = kx_2$ и 3 ставит правду, то, значит, при выигрыше в аукционе второй цены агент 1 платит $\max\{kX_2, X_3\}$. Его ожидаемый доход:

$$\Pi_1(b, x_1) = \int_0^{b/k} \left[\int_0^{kx_2} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - kx_2 \right) dx_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{kx_2}^{b} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right) dx_3 \right] dx_2 =$$

$$= \frac{1}{12k^2} (6x_1 b^2 k + 3b^3 - 8b^3 k).$$

Упражнение. Проверьте это.

Ранжирование аукционов не работает

- $\Pi_1(b, x_1) = \frac{1}{12k^2}(6x_1 b^2 k + 3b^3 - 8b^3 k)$.
- Если максимизировать по b, получится, что если второй играет по $\beta(x_2) = kx_2$, то первому тоже выгодно использовать линейную стратегию.
- А оптимум этого равновесия достигается при $k = \frac{7}{8}$.
- Цена получится как вторая наивысшая из kX_1, kX_2 и X_3.

Ранжирование аукционов не работает

- И тогда получится, что для всех $p \leq k$ (проверьте!)

$$L^{II}(p) = \Pr[R^{II} < p] = \frac{p^2 + 2kp^2 - 2p^3}{k^2}.$$

- Это значит, что

$$\mathbf{E}[R^{II}] = \int_0^k p dL^{II}(p) = \frac{175}{384}.$$

- Теперь надо обсчитать английский аукцион.
- Как и прежде, третьему бойцу надо отваливаться на своей собственной цене — для него ничего не меняется.
- Более того, его сигнал не влияет на ценности первого и второго.
- Стратегии ex post равновесия будут совершенно аналогичны асимметричному равновесию, которое мы рассматривали недавно.

Ранжирование аукционов не работает

- Вот какое получится равновесие:

	$\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
1	x_1	x_1	$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$	—
2	x_2	x_2	—	$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$
3	x_3	—	x_3	x_3

- В таблице написаны цены, на которых игроки должны отваливаться при данном множестве «живых» агентов.

Ранжирование аукционов не работает

- Чтобы подсчитать общий доход, подсчитаем ожидаемый доход от каждого.
- Первый выигрывает iff:
  - он не первый навылет, пока ещё живы все три, т.е. $x_1 > \min\{x_2, x_3\}$ и
  - при $x_2 > x_3$ $x_1 > x_2$, и цена равна x_2,
  - а при $x_2 < x_3$ $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 > x_3$, и цена равна x_3.

Ранжирование аукционов не работает

- Ожидаемый платёж игрока 1

$$m_1 = \int_0^1 \int_0^{x_1} \left[\int_0^{x_2} x_2 dx_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_2}^{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2} x_3 dx_3 \right] dx_2 dx_1 = \frac{11}{96}.$$

- У второго то же самое.

Ранжирование аукционов не работает

- Третий выигрывает iff $x_3 > \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, и цена равна $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$:

$$m_3 = 2\int_0^1 \left[\int_0^{x_3}\int_0^{x_1}(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)dx_2dx_1 + \right.$$
$$\left. + \int_{x_3}^{\min\{2x_3,1\}}\int_0^{2x_3-x_1}(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)dx_2dx_1\right]dx_3 = \frac{5}{24}.$$

- Итого получится $\mathbf{E}[R^{\mathrm{Eng}}] = 2m_1 + m_3 = \frac{7}{16}$, что меньше $\mathbf{E}[R^{II}]$.

Когда информацию лучше не сообщать

- Оказывается в аукционе второй цены иногда лучше не болтать лишнего.
- Рассмотрим двух агентов с сигналами X_1 и X_2 и продавца с S.
- X_1, X_2 и S распределены независимо и равномерно на $[0, 1]$, а ценности:

$$v_1(x_1, x_2, s) = x_1 + \alpha(x_2 + s),$$

$$v_2(x_1, x_2, s) = x_2.$$

Когда информацию лучше не сообщать

- Когда мы продаём аукционом второй цены без доп. информации, равновесие достигается в

$$\beta_1(x_1) = \min\left\{\frac{1}{1-\alpha}x_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{E}[S], 1\right\},$$

$$\beta_2(x_2) = x_2.$$

- Чтобы это проверить, заметим, что $\beta_1(x_1) > \beta_2(x_2)$ iff $\mathbf{E}[v_1(x_1, x_2, S)] > \beta_2(x_2)$.
- Значит, ex post первый участник не пожалеет.
- Аналогично, $\beta_2(x_2) > \beta_1(x_1)$ iff $\mathbf{E}[v_2(x_1, x_2, S)] > \beta_1(x_1)$, и второй тоже внакладе не останется.

Когда информацию лучше не сообщать

- Равновесная цена:

$$R^{II} = \min\left\{\frac{1}{1-\alpha}X_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{E}[S], X_2\right\}.$$

Когда информацию лучше не сообщать

- Что изменится, когда информацию сообщают?
- Изменится равновесие:

$$\hat{\beta}_1(x_1, s) = \min\left\{\frac{1}{1-\alpha}x_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}s, 1\right\},$$

$$\hat{\beta}_2(x_2, s) = x_2.$$

Упражнение. Проверьте, что это равновесие.

Когда информацию лучше не сообщать

- Тогда равновесная цена

$$\hat{R}^{II} = \min\left\{\frac{1}{1-\alpha}X_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}S, X_2\right\}, \text{ и}$$

$$\mathbf{E}\left[\hat{R}^{II} | X_1 = x_1, X_2 = x_2\right] = \mathbf{E}\left[\min\left\{\frac{1}{1-\alpha}x_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}S, x_2\right\}\right] <$$

$$< \min\left\{\frac{1}{1-\alpha}x_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{E}[S], x_2\right\} = \mathbf{E}[R^{II} | X_1 = x_1, X_2 = x_2],$$

т.к. min — это вогнутая функция.

Асимметричные равновесия

- Оказывается, в аукционах бывают и несимметричные равновесия, даже если агенты симметричны.
- Рассмотрим аукцион второй цены с двумя агентами.
- Обозначим их сигналы X и Y, их ценности $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$.
- В симметричной модели $v_1(x, y) = v_2(y, x)$ для всех x, y.
- Конкретный вид распределения сигналов в дальнейшем не играет роли.

Асимметричные равновесия

- Есть симметричное равновесие: $\beta^{II}(x) = v(x,x) = v_1(x,x)$.
- Но вот, например, асимметричное равновесие: первый никогда не сдаётся, и поэтому лучшее, что может сделать второй — выйти из игры сразу.
- Получается равновесие в стратегиях $\beta_1(x) = 1$, $\beta_2(y) = 0$.
- Но тут β_1 доминирована — нечистая работа.

Асимметричные равновесия

- В недоминированных стратегиях: пусть $\varphi : [0, \omega] \to [0, \omega]$ — возрастающая сюръекция. Рассмотрим стратегии:

$$\beta_1(x) = u(x, \varphi(x)),$$

$$\beta_2(y) = u(\varphi^{-1}(y), y).$$

- Тогда (β_1, β_2) образуют равновесный профиль стратегий, более того, делают это ex post.
- Почему?

Асимметричные равновесия

- Пусть $\beta_1(x) > \beta_2(y)$, и первый выигрывает и платит $p_2 = \beta_2(y)$.
- Но тогда $\beta_1(x) > \beta_2(y) = \beta_1(\varphi^{-1}(y))$, и $x > \varphi^{-1}(y)$.
- Значит, первый агент выиграет положительную прибыль $(u(x, y) > u(\varphi^{-1}(y), y) = \beta_2(y))$ и не выиграет от девиации. Второй тоже, т.к. ему надо будет перебить цену первого, а это приведёт к убыткам.

Асимметричные равновесия

- Можно даже сделать равновесие разрывным и неэффективным.
- Рассмотрим опять двух агентов, аукцион второй цены.
- Выберем две точки z' и z'': $0 < z' < z'' < 1$.

Асимметричные равновесия

- Рассмотрим такие стратегии:

$$\beta_1(x) = \begin{cases} v_2(x, z''), & \text{если } x \in [z', z''], \\ \beta^{II}(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\beta_2(x) = \begin{cases} v_1(z', y), & \text{если } y \in [z', z''], \\ \beta^{II}(y) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\beta^{II}(x) = v_1(x, x)$ — оптимальная стратегия аукциона второй цены.

Асимметричные равновесия

- Равновесие неэффективно: если оба $x, y \in [z', z'']$, то при $x < y$ выигрывает первый, хотя эффективно было бы выиграть второму.

Упражнение. Докажите, что эти стратегии действительно образуют ex post равновесие.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
  http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.