# Алгоритмы со вторым шансом

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

# Outline

# Всё плохо

- На прошлой лекции мы обсудили, что вообще всё плохо.
- Если P$\neq$NP (а это, скорее всего, так), то все механизмы вырожденные и неразумные.
- Потому что VCG не очень-то реализуешь.
- Но ведь что-то как-то надо реализовать. Вот что?

# Что мы будем делать

- Nisan и Ronen предлагают вот какой выход.
- Рассмотрим VCG-based алгоритм.
- В нём, как мы в прошлый раз говорили, польза для агента равна суммарной пользе всех агентов.
- То есть, грубо говоря, эгоистичный агент неизбежно должен оптимизировать всеобщее счастье.

# Что мы будем делать

- Что должно произойти, чтобы агенту было выгодно соврать?
- Он должен суметь найти более эффективный для всеобщего счастья путь, чем нашёл (субоптимальный) алгоритм, который работает в механизме.
- Но это же очень сложно — задачу трудно решить лучше, чем наш субоптимальный алгоритм.

# Что мы будем делать

- Поэтому возникает вот какая идея.
- Давайте будем у агентов спрашивать: а может, вы знаете, как сделать лучше?
- Мы позволим агентам подавать *апелляции* на используемый в механизме алгоритм распределения.

# Что мы будем делать

- Неформально, апелляция — это функция, которая говорит: «если у нас были типы $(v_1, \ldots, v_N)$, то нам лучше было бы сказать $(v_1', \ldots, v_N')$, тогда всеобщее счастье было бы больше».
- Механизм проверяет апелляции и удовлетворяет их, если действительно всеобщее счастье получается больше.
- Тогда получается, что агенту выгодно говорить правду, потому что он может попробовать соврать в апелляции, и тем самым перепроверить, будет ли выгодно врать в этом случае. Т.е. агент сможет и правду сказать, и перепроверить, а не соврать ли.

# Формальная постановка

- Как водится, напомним определения.
- $N$ агентов, у агента $i$ есть функция $v_i$, определяющая его тип. Агент $i$ в частном порядке знает $v_i$.
- Ценности квазилинейные: если при результате $o$ механизм платит агенту $p_i$, то общая польза агента

$$u_i = v_i(o) + p_i.$$

- Агент хочет максимизировать $u_i$.
- Механизм хочет быть эффективным, то есть максимизировать $V(v, o) = \sum_{i=1}^{N} v_i(o)$.

# Формальная постановка

- Прямой механизм — это механизм, где:
  - спрашивают типы $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_N)$,
  - а потом вычисляют исход $g(\mathbf{w}) \in \mathcal{O}$
  - и платежи каждому участнику $p(\mathbf{w}) = (p_1, \ldots, p_N)$.
- Здесь, как и раньше, агенты могут врать, т.е. априори $w_i \neq v_i$.

# Формальная постановка

- Механизм правдивый, если каждый агент для каждого возможного своего типа $v_i$ и каждого возможного множества ставок других агентов $\mathbf{w}_{-i}$ максимизирует свою $u_i$, если объявляет свою настоящую функцию ценности $v_i$.
- То есть мы будем говорить о правдивости в доминантных стратегиях.

# Формальная постановка

- Механизм $(g, p)$ является VCG-механизмом, если:
    - $g(\mathbf{w})$ максимизирует общую ценность относительно $\mathbf{w}$, т.е. $g(\mathbf{w}) \in \mathrm{argmax}_o V(\mathbf{w}, o)$;
    - выплаты вычисляются по VCG-формуле:

$$p_i(\mathbf{w}) = \sum_{j \neq i} w_j(g(\mathbf{w})) + h_i(\mathbf{w}_{-i}),$$

где $h_i$ — некая (произвольная) функция от $\mathbf{w}_{-i}$.

# Формальная постановка

- Механизм $(g, p)$ является VCG-механизмом, основанным на функции $g$, если
  - выплаты вычисляются по VCG-формуле:
  $$p_i(\mathbf{w}) = \sum_{j \neq i} w_j(g(\mathbf{w})) + h_i(\mathbf{w}_{-i}),$$
  где $h_i$ — некая (произвольная) функция от $\mathbf{w}_{-i}$.
- Т.е. мы просто берём некоторую функцию распределения и строим выплаты соответственно.
- Важное замечание: выплаты здесь не равны выплатам VCG, т.к. мы подставляем не оптимальную функцию, а нашу $g$.

# Формальная постановка

- Теперь перейдём к новому.
- Обозначим через $\Theta = \prod_i \Theta_i$ множество типов всех агентов. *Апелляция* — это частичная функция $l : \Theta \to \Theta$.
- Т.е. агент говорит своей функцией: «а вот когда типы $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$, алгоритм вашего механизма $g$ даёт больше всеобщего счастья, если вместо $\theta$ ему дать $l(\theta)$».
- Это и есть суть его апелляции.

# Формальная постановка

- Сам механизм с апелляциями работает следующим образом:
  1. Публикуется алгоритм $g$ и временной лимит $T$ на работу апелляций (иначе апелляция могла бы просто решать VCG, но мы бы никогда не смогли такую апелляцию обсчитать).
  2. Каждый агент подаёт свой тип $w_i$ (ставку) и функцию апелляции $l_i$.
  3. Механизм подсчитывает $g(\mathbf{w})$, $g(l_1(\mathbf{w})), \ldots, g(l_N(\mathbf{w}))$ и выдаёт тот ответ, который максимизирует всеобщее счастье.
  4. Если $\hat{o}$ — избранный исход, то платежи получаются как
  $$p_i = \sum_{j \neq i} w_j(\hat{o}) + h_i(\mathbf{w}_{-i}, \mathbf{l}_{-i}),$$
  где $h_i$ — произвольная функция.
- Мы будем пока предполагать, что $h_i = 0$, т.к. они не влияют на действия агентов.

# Формальная постановка

- Получается, что действие агента — это пара $(w_i, l_i)$.
- Будем говорить, что агент правдивый, если $w_i$ равно его истинной скрытой ценности $v_i$.
- Тогда очевидно, что для механизма с апелляциями для каждого вектора ставок $\mathbf{w}$, если агенты правдивы $(\mathbf{w} = \mathbf{v})$ и избран исход $\hat{o}$, то

$$V(\mathbf{v}, \hat{o}) \geq V(\mathbf{w}, g(\mathbf{v})).$$

- То есть для правдивых агентов результат всегда не хуже, чем $g(\mathbf{v})$. Это просто очевидно из определения.

# Формальная постановка

- Кроме того, верен факт, аналогичный соответствующему свойству механизмов VCG: агент $i$ получает доходность (utility), равную

$$V((v_i, \mathbf{w}_{-i}), \hat{o}) + h_i(\mathbf{w}_{-i}, \mathbf{l}_{-i}).$$

- То есть агенту выгодно говорить $w_i \neq l_i$ только если это либо даст распределение лучше, чем $g(\mathbf{v})$, либо поможет апелляции какого-нибудь другого агента.

# Формальная постановка

- А если агент будет врать, то это может ему повредить в двух случаях.
- Либо алгоритм $g$ станет хуже работать, либо механизм начнёт измерять всеобщее счастье на основании неправильных типов, и поэтому выберет не ту альтернативу.
- Мы хотели бы доказать, что агенту выгодно сказать правду о своём типе, а все свои сомнения в оптимальности $g$ изложить в рамках апелляции.

# Конкретный пример

- Рассмотрим комбинаторный аукцион на двух вещах.
- Тип агента состоит из трёх чисел — ценности вещи 1, ценности вещи 2 и ценности их обеих.
- Пусть для агента $i$ вещи комплементарны: за обе он готов отдать \$3, а за каждую — только по \$1.
- Тогда его тип будет $v_i = \{3, 1, 1\}$.

# Конкретный пример

- Давайте предположим, что агент заметил, что алгоритм распределения частенько работает лучше, если ему не давать вариантов, а говорить жёстко $w_i = \{3, 0, 0\}$ вместо $\{3, 1, 1\}$.
- В VCG-based механизме агент предпочтёт говорить $w_i$. Могут возникнуть две проблемы.
  1. Если даже остальные правдивы, может быть много разных векторов $\mathbf{v}_{-i}$, для которых $w_i$ вместо $v_i$ даёт результаты не лучше, а хуже.
  2. Но даже если каждый агент выберет $w_i$ так, чтобы $V((v_i, w_i), g(v_i, \mathbf{w}_{-i})) \geq V((v_i, w_i), g(\mathbf{w}))$, может так случиться, что общий результат в итоге всех врущих агентов станет хуже: $V(\mathbf{v}, g(\mathbf{w})) < V(\mathbf{v}, g(\mathbf{w}))$.

## Конкретный пример

- А что будет в механизме второго шанса?
- А будет то, что агент сможет проверить, станет ли лучше от вранья *в данном конкретном случае*.
- Он подаст $w_i = \{3, 1, 1\}$ и апелляцию, которая заменяет $w_i$ на $w_i' = \{3, 0, 0\}$.
- Механизм подставит $\{3, 0, 0\}$ вместо $w_i$ *с данными конкретными типами других агентов*.
- То есть ситуация для $i$ беспроигрышная.

# Outline

# О правдивости в механизмах с апелляциями

- Нам придётся немножко по-другому определять правдивость, потому что тут более сложная конструкция.
- Придётся изменить и понятие доминантной стратегии.
- Неформально, стратегия будет доминантной, если агент не знает о стратегии, которая лучше.

# О правдивости в механизмах с апелляциями

- Обозначим через $A_i$ множество действий агента $i$ (они уже не совпадают с типами).
- *Функция ревизии* агента $i$ — это частичная функция $b_i : \mathbf{A}_{-i} \to A_i$.
- Её смысл: «если бы я знал, что другие сделают $\mathbf{a}_{-i}$, я б выбрал $b_i(\mathbf{a}_{-i})$».

# О правдивости в механизмах с апелляциями

- Пусть $i$ — агент, $b_i$ — его функция ревизии, $\mathbf{a}_{-i}$ — вектор действий других.
- Тогда действие $a_i$ удовлетворяет *feasible non-regret condition* (a kingdom for a good translation!), если либо $\mathbf{a}_{-i}$ не лежит в области определения $\mathrm{dom} b_i$, либо $u_i((b_i(\mathbf{a}_{-i}), \mathbf{a}_{-i})) \leq u_i(\mathbf{a})$.
- То есть агент не знает ничего лучшего, чем сделать $a_i$.

# О правдивости в механизмах с апелляциями

- Действие $a_i$ называется *целесообразно доминантным* (feasibly dominant), если для *каждого* вектора $\mathbf{a}_{-i}$ $a_i$ удовлетворяет feasible non-regret condition относительно $a_i$ и $b_i$.
- То есть агент ни для каких $\mathbf{a}_{-i}$ не знает лучше, чем сделать $a_i$.
- Действие называется *целесообразно правдивым* (feasibly truthful), если оно правдиво и целесообразно доминантно.

# О правдивости в механизмах с апелляциями

- Какие функции ревизии приводят к целесообразно правдивым действиям?
- Когда агенты правдивы, счастье не меньше $V(\mathbf{v}, g(\mathbf{v}))$.
- Обозначим $\perp$ пустую апелляцию.
- Функция ревизии $b$ называется *апелляционно независимой*, если у каждого вектора в её области определения есть только пустые апелляции, т.е. $\forall \mathbf{a}_{-i} \in \mathrm{dom} b$ существует такой $\mathbf{w}_{-i}$, что $\mathbf{a}_{-i} = (\mathbf{w}_{-i}, \perp)$.

# О правдивости в механизмах с апелляциями

- Будем говорить, что алгоритм $T$-ограничен, если он работает за $T$.
- Апелляционно независимая функция $T$-ограничена, если она сама $T$-ограничена и каждая апелляция в её образе тоже $T$-ограничена.

# О хороших механизмах с апелляциями

## Теорема

*Если у агента в механизме с апелляциями есть апелляционно независимая $T$-ограниченная функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $T$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(T)$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Пусть $b_i$ — функция ревизии. Нужно определить апелляцию.
- Для каждого $\mathbf{w}_{-i}$ есть два исхода — $o_1 = g(\mathbf{w})$ и $o_2 = g(\tau_i(\mathbf{w}))$, где $(w_i, \tau_i) = b_i(\mathbf{w}_{-i}, \perp)$.

# О хороших механизмах с апелляциями

**Теорема**

*Если у агента в механизме с апелляциями есть апелляционно независимая $T$-ограниченная функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $T$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(T)$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Мы определим $l_i(\mathbf{w})$ как лучший из этих исходов: $l_i(\mathbf{w}) = \mathrm{argmax}_{j=1,2} V((v_i, \mathbf{w}_{-i}), o_j)$.
- То есть $l_i$ проверяет, хорошо ли будет агенту сказать $w_i$.
- Тогда $a_i = (v_i, l_i)$ будет целесообразно правдивым. Докажем это.

# О хороших механизмах с апелляциями

## Теорема

*Если у агента в механизме с апелляциями есть апелляционно независимая $T$-ограниченная функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $T$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(T)$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Если $a_i$ не правдиво, то существует вектор $\mathbf{a}_{-i} = (\mathbf{w}_{-i}, \perp) \in \mathrm{dom} b_i$, для которого $u(a_i, \mathbf{a}_{-i}) < u(b_i(\mathbf{a}_{-i}), \mathbf{a}_{-i})$.
- Обозначим $b_i(\mathbf{a}_{-i}) = (w_i, \tau_i)$.
- Вспомним, что доход агента равен всеобщему счастью $V((v_i, \mathbf{w}_{-i}), o)$ (с точностью до $h_i$).

# О хороших механизмах с апелляциями

**Теорема**

*Если у агента в механизме с апелляциями есть апелляционно независимая $T$-ограниченная функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $T$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(T)$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Пусть агент выбрал $b_i(\mathbf{a}_{-i})$ и получил исход $\hat{o}$.
- $\hat{o}$ был выбран из множества $\{o_1, o_2\}$, и счастье измерялось относительно заявки агента $w_i$.

# О хороших механизмах с апелляциями

**Теорема**

*Если у агента в механизме с апелляциями есть апелляционно независимая $T$-ограниченная функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $T$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(T)$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Пусть агент выбрал правдивое действие $a_i$ и получил исход $\tilde{o}$.
- Этот исход был выбран механизмом из $o_0 = g(v_i, \mathbf{w}_{-i})$, а также из $o_1$ и $o_2$ (по определению $l_i$) и ещё из чего-то, т.е. множество, из которого алгоритм выбирал полным перебором, строго увеличилось.
- Кроме того, исход выбирался относительно правильного типа $v_i$.

# О хороших механизмах с апелляциями

**Теорема**

*Если у агента в механизме с апелляциями есть апелляционно независимая $T$-ограниченная функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $T$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(T)$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Это значит, что $V((v_i, \mathbf{w}_{-i}), \tilde{o}) \geq V((v_i, \mathbf{w}_{-i}), \hat{o})$.
- Противоречие. Осталось только заметить, что $l_i$ действительно $\Omega(T)$-ограничена.

# Time-optimality tradeoff

- Вообще говоря, существует tradeoff между оптимальностью функций ревизии и временем их работы.
- Если лимита нет, естественно, можно подавать оптимальные конфигурации.
- Но разумно предположить, что небольшой лимит для практических нужд будет достаточен.

# $d$-bounded функции ревизии

- Функция ревизии $b_i$ $d$-bounded, если:
  1. Она $O(n^d)$-ограничена.
  2. Рассмотрим множество всех апелляций в области определения $b_i$:

  $$L = \{l_i \mid \exists \mathbf{l}_{-ij}, \mathbf{w}_{-i} : \ (\mathbf{w}_{-i}, (l_i, \mathbf{l}_{-i})) \in \mathrm{dom} b_i\} \bigcup$$
  $$\bigcup \{l_i \mid \exists (\mathbf{w}_{-i}, \mathbf{l}_{-i}), w_i : \ (w_i, l_i) = b_i(\mathbf{w}_{-i}, \mathbf{l}_{-i})\}.$$

  Тогда $|L| = O(n^d)$.
  3. Для некоторой константы $c$ каждая апелляция из $L$ $cn^d$-ограничена.

# О хороших механизмах с апелляциями

**Теорема**

*Если у агента в механизме с апелляциями есть d-bounded функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $O(n^d)$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(n^{2d})$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Для каждого вектора $\mathbf{w}_{-i}$ вычислим следующие исходы:
  1. $o_0 = g(\mathbf{w})$.
  2. Для всех $\tau_j \in L$ вычислим $o_j = g(\tau_j(\mathbf{w}))$.
  3. $l(\mathbf{w}) := \mathrm{argmax}_{0 \leq j \leq |L|} V((v_i, \mathbf{w}_{-i}), o_j)$.

# О хороших механизмах с апелляциями

**Теорема**

*Если у агента в механизме с апелляциями есть d-bounded функция ревизии, и алгоритм распределения механизма тоже $O(n^d)$-ограничен, то для каждого $T'$-ограниченного механизма, $T' = \Omega(n^{2d})$, у этого агента есть целесообразно правдивое действие.*

- Тогда $l_i$ будет $n^{2d}$-ограничена, т.к. мы делаем $n^d + 1$ вычисление по $cn^d$.
- И $a_i = (v_i, l_i)$ будет целесообразно правдивым.

**Упражнение.** Докажите это. Доказательство полностью аналогично предыдущей теореме.

## Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
  http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.