**ОПТИМАЛЬНЫЕ И ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ
ЛЕКЦИЯ 3 КУРСА
«ТЕОРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ»**

СЕРГЕЙ НИКОЛЕНКО

1. Оптимальные механизмы

1.1. **Введение.**

1.1.1. *Эффективные и оптимальные механизмы.* Мы бы хотели, чтобы механизм был *хорошим*. Однако можно по-разному оценивать, насколько хорош механизм. Рассмотрим две в некотором смысле противоположные трактовки этого определения.

Будем называть *эффективным* тот механизм, который хорош для агентов, то есть участников аукциона. Такой механизм максимизирует всеобщее счастье (social welfare) — суммарный доход всех агентов.

До этого мы рассматривали прямые механизмы, в которых у каждого агента спрашивают его тип. Они полностью описывались двумя параметрами: правилом распределения $\mathbf{Q}$ и правилом выплаты $\mathbf{M}$. Отметим, что свойство эффективности имеет отношение только к $\mathbf{Q}$. Таким образом, для прямого механизма $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ правило распределения $\mathbf{Q}$ *эффективно*, если

$$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in \mathrm{argmax}_{\mathbf{Q}} \sum_{j=1..N} Q_j x_j.$$

Иначе говоря, объект достаётся тому, кому он *действительно* больше всего нужен, то есть тому агенту, у которого максимальная ценность x_j.

Будем называть *оптимальным* тот механизм, который хорош для продавца. То есть при этом максимизируется ожидаемый доход продавца:

$$\mathbf{E}(R) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}[m_i(X_i)],$$

где $m_i(X_i)$ — выплата агента i, X_i — его распределение ценностей, а x_i — конкретное значение ценности агента.

1.2. **Аукцион второй цены с резервной ценой.**

Сначала рассмотрим оптимальные механизмы. Начнём с примера, а потом будем строить более общие конструкции.

1.2.1. *Аукцион второй цены с резервной ценой.* Рассмотрим аукцион второй цены (он же аукцион Викри). Напомним, что в этом аукционе победитель платит вторую по величине ставку.

Сделаем одну модификацию: добавим такую *резервную цену* r, что:

- выигравший агент платит максимум между второй ставкой и r;
- если все ставки ниже r, продавец оставляет товар себе.

Законспектировали Иван Лагунов и Евгений Мандриков.

То есть резервная цена — минимальная, по которой продавец согласен расстаться с товаром. Поэтому агенты, ставки которых меньше r, могут просто не участвовать в аукционе. Таким образом, данный аукцион будет отличаться от аукциона Викри только в том случае, когда лишь один агент объявит ставку выше резервной цены.

1.2.2. *Стратегии и выплаты.* Рассмотрим теперь, каковы будут стратегии и выплаты агентов в новом модифицированном аукционе по сравнению с обычным аукционом Викри.

Во-первых, стратегии не изменятся — по-прежнему доминантная стратегия в том, чтобы говорить правду. Напомним, что доминантная стратегия — это такая стратегия, которая выгоднее любой другой вне зависимости от стратегий других агентов.

Дело в том, что наличие резервной цены никак не повлияет на то, что аукцион будет правдивым. То есть по-прежнему, если агент говорит больше, чем его настоящая цена, то может случиться так, что ему придется заплатить больше его настоящей цены, а если он говорит меньше настоящей цены, то он может не получить объект, несмотря на то, что мог заплатить меньше настоящей цены. Напомним, что аукцион правдив тогда, когда стоимость, которую платит агент, не зависит от его ставки, но только от ставок других агентов. От ставки агента зависит лишь, выиграет он или нет.

Во-вторых, изменятся выплаты агентов. В аукционе Викри была выплата

$$m(x) = \int_0^x yg(y)dy,$$

где $g(x) = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}$ — плотность второй порядковой статистики. То есть раньше в аукционе второй цены платили ожидание второй сверху ставки.

Теперь рассмотрим выплату агента в аукционе с резервной ценой. Агент, который ставит r, ожидает заплатить просто $rG(r)$, поскольку $G(r)$ — вероятность того, что агент выиграет, заплатив r. Если же агент ставит больше r, то он ожидает заплатить

$$m(x,r) = rG(r) + \int_r^x yg(y)dy,$$

то есть столько же, сколько в первом случае, плюс ещё ожидание доплаты за выигрыш благодаря более высокой ставке.

1.2.3. *Доходность.* Проверим теперь, что принцип эквивалентности доходности работает и с резервной ценой тоже. В аукционе первой цены анализ будет точно таким же, как раньше, только теперь участник с ценностью $x < r$ вообще не будет участвовать, и ожидание ставки агента станет

$$\beta(x) = \mathbf{E}[\max\{Y_1, r\}|Y_1 < x].$$

Раньше было просто ожидание Y_1, а теперь стал максимум Y_1 и r, поскольку ставка не может быть меньше r. Получаем, что

$$\beta(x) = \mathbf{E}[\max\{Y_1, r\}|Y_1 < x] = r\frac{G(r)}{G(x)} + \frac{1}{G(x)}\int_r^x yg(y)dy.$$

Здесь первое слагаемое относится к случаю, когда $Y_1 < r$, а второе слагаемое — к случаю, когда $Y_1 > r$. Так как $G(x)$ — вероятность того, что $Y_1 < x$, то выплата агента равна $\beta(x)G(x)$. Таким образом, умножая выражение справа на $G(x)$, получим ту же самую выплату для агента i, что и в аукционе второй цены.

Итак, доходность у аукционов первой и второй цен одинаковая. Найдем ожидаемую доходность продавца от одного агента:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[m(X,r)] = \int_r^\omega m(x,r)f(x)dx = \\
= \int_r^\omega \left(rG(r) + \int_r^x yg(y)dy \right) f(x)dx = \\
= rG(r)\int_r^\omega f(x)dx + \int_r^\omega \left(\int_y^\omega f(x)dx \right) yg(y)dy = \\
= rG(r)(1-F(r)) + \int_r^\omega y(1-F(y))g(y)dy.
\end{aligned}$$

Здесь мы меняли порядок интегрирования во втором слагаемом.

1.2.4. *Как максимизировать?* Теперь нужно максимизировать доходность продавца. Обозначим через x_0 его собственную ценность объекта (во сколько он оценивает тот факт, что объект останется у него). То есть раньше мы рассматривали частный случай при $x_0 = 0$. Тогда общий доход продавца от резервной цены r получается как

$$\Pi_0 = N\mathbf{E}[m(X,r)] + F(r)^N x_0.$$

Второе слагаемое относится к случаю, когда никто не получит объект, то есть все N ставок меньше r. Чтобы максимизировать, продифференцируем по r:

$$\frac{d\Pi_0}{dr} = N(1 - F(r) - rf(r))G(r) + NG(r)f(r)x_0.$$

Введём новое обозначение — так называемую *функцию риска.* Она показывает, грубо говоря, мгновенную вероятность «выжить», если считать $F(x)$ распределением вероятности «смерти»:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}.$$

Тогда в терминах функции риска производная общего дохода продавца получается

$$\frac{d\Pi_0}{dr} = N(1-(r-x_0)\lambda(r))(1-F(r))G(r).$$

При $x_0 > 0$ производная $\frac{d\Pi_0}{dr}(x_0) = N(1-F(x_0))G(x_0)$ положительна, т.е. продавцу выгодно установить резервную цену $r > x_0$. Производная зануляется только в точке $x_0 = 0$, но при этом тоже выгодно установить резервную цену $r > 0$, что подтвердится в примере ниже. Иначе говоря, *резервная цена должна быть выше ценности продукта для продавца.*

А максимум получится, если

$$(r^* - x_0)\lambda(r^*) = 1, \text{ или } r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = x_0.$$

1.2.5. *Пример.* Подсчитаем оптимальную резервную цену для равномерного распределения ценностей агентов на $[0,1]$. Найдем ожидаемый доход у продавца в общем случае и в случае аукциона без резервной цены.

Поскольку ценности распределены на $[0,1]$, то $F(x)=x, f(x)=1$.

Тогда $\lambda(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=\frac{1}{1-x}$.

Считаем оптимальную резервную цену r^*: $x_0=r^*-\frac{1}{\lambda(r^*)}=2r^*-1$.

Пусть $x_0=0$, тогда $r^*=\frac{1}{2}$ — искомая резервная цена.

Найдем теперь ожидаемый доход продавца:

$$\Pi_0=NrG(r)(1-F(r))+\int_r^1 y(1-F(y))g(y)dy+F(r)^N x_0.$$

Зная, что $G(x)=x^N$, а значит $g(x)=Nx^{N-1}$, после упрощения получаем:

$$\Pi_0=\frac{N^2}{(N+1)(N+2)}+\frac{Nr^{N+1}}{N+1}-\frac{2Nr^{N+2}}{N+2}.$$

Тогда ожидаемый доход продавца без резервной цены ($r=0$) равен первому слагаемому.

1.2.6. *Плата за участие.* Вместо резервной цены можно ввести плату за участие. Они эквивалентны благодаря предположению о том, что покупатели нейтральны к риску. То есть, например, они готовы заплатить 10\$, чтобы с вероятностью $\frac{1}{2}$ получить 20\$.

Резервная цена r отсекает участников с ценностями $x<r$. То же самое получится, если заставить «за вход» заплатить

$$e=\int_0^r G(y)dy,$$

т.е. ожидаемый доход участника с ценностью ровно r.

1.3. **Общая постановка: доход продавца.**

1.3.1. *Общая постановка.* Теперь вернёмся к более общей ситуации. Для прямого механизма $(\mathbf{Q},\mathbf{M})$ нужно максимизировать ожидание дохода продавца:

$$\mathbf{E}(R)=\sum_{i=1}^N \mathbf{E}[m_i(X_i)],$$

где X_i — распределение ценностей агента i, а $m_i(X_i)$ — его выплата. Далее мы подсчитаем это явно.

1.3.2. *Вспомним обозначения.* Далее мы будем использовать обозначения доходности и выплаты агентов, поэтому запишем их отдельно:

$q_i(z_i)$ — ожидаемая доходность агента i, когда он говорит z_i, а остальные говорят правду:

$$q_i(z_i)=\int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i,\mathbf{x}_{-i})f_{-i}(\mathbf{x}_{-i})\mathbf{dx}_{-i}.$$

$m_i(z_i)$ — ожидаемая выплата агента i:

$$m_i(z_i)=\int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i,\mathbf{x}_{-i})f_{-i}(\mathbf{x}_{-i})\mathbf{dx}_{-i}.$$

Напомним, что $f_{-i}(\mathbf{x}_{-i})$ означает распределение ценностей агентов кроме агента i.

1.3.3. *Вывод ожидаемого дохода продавца.* Здесь используется формула для ожидаемой выплаты $m_i(x_i)$ агента i из теоремы об эквивалентности доходности:

$$\mathbf{E}[m_i(X_i)] = \int_0^{\omega_i} m_i(x_i) f_i(x_i) dx_i = \\ = m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i) dx_i - \int_0^{\omega_i} \int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i.$$

Преобразуем двойной интеграл, поменяв в нем порядок интегрирования:

$$\int_0^{\omega_i} \int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i = \int_0^{\omega_i} \int_{t_i}^{\omega_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dx_i dt_i = \int_0^{\omega_i} (1 - F_i(t_i)) q_i(t_i) dt_i.$$

Запишем снова ожидаемую выплату агента i и вспомним определение q_i — интеграл по всем x кроме i:

$$\mathbf{E}[m_i(X_i)] = m_i(0) + \int_0^{\omega_i} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) q_i(x_i) f_i(x_i) dx_i = \\ = \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В итоге, просуммировав по всем агентам, получаем ожидаемый доход продавца:

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}[m_i(X_i)] = \sum_{i=1}^{N} m_i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Осталось максимизировать это выражение при следующих условиях:

- правдивость, что равносильно неубыванию q_i;
- рациональность, что равносильно $m_i(0) \le 0$, т.е. если у агента собственная ценность 0, то он должен заплатить не больше 0, чтобы не быть в убытке.

1.3.4. *Виртуальные ценности.* Введём для упрощения записи понятие *виртуальной ценности* предмета для агента i:

$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}.$$

Смысл этой ценности в том, что продавец должен максимизировать $\psi_i(x_i)$, если хочет быть оптимальным. Заметим, что, если максимизировать x_i, то он будет эффективным.

Докажем, что $\mathbf{E}[\psi_i(X_i)] = 0$:

$$\mathbf{E}[\psi_i(X_i)] = \mathbf{E}(X_i) - \int_{X_i} \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} f(x_i) dx_i = \mathbf{E}(X_i) - \int_{X_i} (1 - F_i(x_i))\, dx_i.$$

Рассмотрим теперь отдельно интеграл справа. Поменяем порядок интегрирования, как уже было сделано выше:

$$\int_0^{\omega_i} (1 - F_i(x_i))\, dx_i = \int_0^{\omega_i} \left(\int_{x_i}^{\omega_i} f(y) dy \right) dx_i =$$
$$= \int_0^{\omega_i} \left(\int_0^{y} dx_i \right) f(y) dy = \int_0^{\omega_i} f(y) y dy = \mathbf{E}(X_i).$$

Таким образом, получили, что математическое ожидание распределения виртуальных ценностей равно нулю.

Будем называть задачу дизайна механизмов *регулярной*, если ψ_i является возрастающей функцией от x_i для любого i . Это эквивалентно тому, что функция риска λ_i возрастает, так как

$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1}{\lambda_i(x_i)}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только регулярные задачи.

Запишем ожидаемый доход продавца в терминах виртуальных ценностей:

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{i=1}^{N} m_i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{X}} \psi_i(x_i) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Рассмотрим подынтегральное выражение $\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x_i) Q_i(\mathbf{x})$. $\mathbf{Q}$ похожа на весовую функцию, взвешивающую ψ_i. Резонно было бы дать максимальный вес максимальному ψ_i (если он положительный), а про остальные забыть. Это бы максимизировало функцию *в каждой точке*, а значит, и интеграл тоже. Это и будет идеей конструкции, но ещё нужно учесть ограничения (правдивость и рациональность).

1.3.5. *Конструкция оптимального механизма.* Рассмотрим прямой механизм $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$, в котором:

- $\mathbf{Q}$ распределяет объект покупателю i с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда у него максимальная и неотрицательная виртуальная ценность:
$$Q_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ iff } \psi_i(x_i) = \max_{j=1..N} \psi_j(x_j) \geq 0.$$
Если покупателей с максимальным $\psi_i(x_i)$ несколько, то на них может быть любое положительное распределение $\mathbf{Q}$. То есть просто не важно, кому именно из них достанется объект.
- плату $\mathbf{M}$ определим следующим образом для выполнения рациональности:
$$M_i(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x}) x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) dz_i.$$

Докажем, что это и есть оптимальный механизм, если задача регулярна.

1.3.6. *Доказательство.* Во-первых, покажем *правдивость*. Пусть $z_i < x_i$. Тогда, по регулярности, $\psi_i(z_i) < \psi_i(x_i)$, и, значит, для всех $\mathbf{x}_{-i}$ $Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) \leq Q_i(x_i, \mathbf{x}_{-i})$. Значит, q_i неубывающая, то есть механизм правдивый.

Во-вторых, покажем *рациональность*. Очевидно, что $M_i(0, \mathbf{x}_{-i}) = 0$, значит, $m_i(0) = 0$, и механизм рациональный. Заметим, что форма платы $\mathbf{M}$ полностью задана распределением $\mathbf{Q}$ с точностью до константы, которую мы изначально приняли такой, чтобы выполнялось $m_i(0) = 0$.

Таким образом, это рациональный и правдивый механизм. Кроме того, он оптимален, так как максимизирует каждое из двух слагаемых формулы дохода продавца по отдельности.

1.3.7. *Некоторые свойства полученного механизма.*

- Максимальный доход получается по простой формуле:
$$\max \mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[\max\{\psi_1(X_1), \ldots, \psi_N(X_N), 0\}].$$
Ноль добавляется на случай, если все виртуальные ценности будут отрицательны.
- Проанализируем, сколько (интуитивно) платит победитель.
  Рассмотрим новую функцию
$$y_i(\mathbf{x}_{-i}) = \inf\{z_i \mid \psi_i(z_i) > 0 \text{ и } \forall j \neq i\ \psi_i(z_i) \geq \psi_j(x_j)\}.$$
Это минимальное значение ставки игрока i, которое выигрывает у всех остальных. Тогда определение правила распределения $\mathbf{Q}$ будет таким:
$$Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \begin{cases} 1, & z_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}), \\ 0, & z_i < y_i(\mathbf{x}_{-i}). \end{cases}$$
Посчитаем интеграл:
$$\int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) dz_i = \begin{cases} x_i - y_i(\mathbf{x}_{-i}), & x_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}), \\ 0, & x_i < y_i(\mathbf{x}_{-i}). \end{cases}$$
Значит, правило выплаты будет таким:
$$M_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}_{-i}), & x_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}), \\ 0, & x_i < y_i(\mathbf{x}_{-i}). \end{cases}$$
То есть только победитель что-то платит, и он платит минимальную ставку $y_i(\mathbf{x}_{-i})$, достаточную, чтобы обеспечить ему выигрыш. Это в точности основной принцип аукциона второй цены. Выше мы доказали, что он оптимален с резервной ценой.

1.3.8. *Ещё раз общий результат.*

Теорема 1. *Для регулярной задачи дизайна механизмов механизм* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$, *где*
$$Q_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \psi_i(x_i) \geq \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \text{ и } \psi_i(x_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$M_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}_{-i}), & \psi_i(x_i) \geq \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \text{ и } \psi_i(x_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
является оптимальным.

1.3.9. *Симметричный случай.* Пусть все плотности распределения ценностей f_i равны, т.е. агенты симметричны. Тогда все виртуальные ценности $\psi_i = \psi$. Тогда получаем, что

$$y_i(\mathbf{x}_{-i}) = \max\left\{\max_{j\neq i} x_j, \psi^{-1}(0)\right\}.$$

Таким образом, победитель платит максимум из всех остальных ставок или резервную цену, если все остальные ставки меньше. То есть мы получили в точности аукцион второй цены с резервной ценой $r = \psi^{-1}(0)$.

1.3.10. *Пример.* Подсчитаем $\psi^{-1}(0)$ для равномерных распределений на $[0, 1]$.

Поскольку $\psi(x) = x - \frac{1}{\lambda(x)}$, то $\psi^{-1}(0) = x$ такой, что $x = \frac{1}{\lambda(x)}$.

Решим это уравнение, используя определение функции риска:

$$x = \frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1 - F(x)}{f(x)}.$$

Поскольку ценности распределены на $[0, 1]$, то $F(x) = x$, $f(x) = 1$. Тогда получаем $\psi^{-1}(0) = x = \frac{1}{2}$. То есть продавцу будет выгодно установить резервную цену в $\frac{1}{2}$.

2. Эффективные механизмы

2.1. **Постановка задачи.** Итак, мы научились максимизировать доход продавца. Теперь максимизируем всеобщее счастье (social welfare). То есть будем пытаться распределить вещь тому, кому она больше всего нравится.

Мы уже знаем, что аукцион второй цены (без резервной цены) эффективен. А вот, например, оптимальный аукцион, который мы только что рассматривали, может оказаться и неэффективным. Во-первых, резервная цена автоматически предполагает, что иногда объект никому не достанется, даже если есть положительные ставки. Во-вторых, максимизируется *виртуальная* ценность: если распределения несимметричные, то это вовсе не эквивалентно максимизации самих x_i.

Теперь обобщим аукцион второй цены. Расширим возможные значения ценностей агентов, то есть обобщим $\mathcal{X}$: он теперь будет $x_i \in [\alpha_i, \omega_i]$, чтобы разрешить отрицательные ценности.

Определение 1. *Функция распределения* $\mathbf{Q}^*$ *называется* эффективной*, если она максимизирует social welfare, то есть* $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmax}_{\mathbf{Q}} \sum_{j=1}^{N} Q_j x_j.$$

То есть просто даём вещь агенту с максимальной ценностью либо одному из таких агентов, если их несколько. *Эффективный* механизм — механизм с эффективной функцией распределения. Введём ещё одно обозначение — если $\mathbf{Q}^*$ уже эффективна, то мы обозначим через W значение этого самого social welfare:

$W(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} Q_j^*(\mathbf{x}) x_j$ — суммарное счастье всех агентов.

$W_{-i}(\mathbf{x}) = \sum_{j\neq i} Q_j^*(\mathbf{x}) x_j$ — суммарное счастье всех агентов без i-го.

2.2. **Механизм VCG.**

2.2.1. *История.* VCG — это Викри-Кларк-Гроувс (Vickrey-Clarke-Groves). Это не совместная работа, а три разных:

- Vickrey (1961) — выдвинул идею аукциона второй цены;
- Clarke (1971) — предложил аналогичный механизм в контексте public goods;
- Groves (1973) — всё обобщил и сформулировал.

2.2.2. *Описание механизма.*

Определение 2. Механизм VCG *(Vickrey-Clarke-Groves) — это эффективный механизм с правилом платежа* $\mathcal{M}^V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$*:*

$$M_i^V(\mathbf{x}) = W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}) - W_{-i}(\mathbf{x}).$$

Он *эффективный*, т.е. правило распределения $\mathbf{Q}$ уже задано:

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmax}_{\mathbf{Q}} \sum_{j=1}^N Q_j x_j.$$

Это значит, что $M_i^V(\mathbf{x})$ — разница между общим welfare при наименьшей возможной ставке агента i и welfare всех остальных агентов при текущей ставке. То есть, грубо говоря, насколько агент суммарно сделал хуже другим. В контексте аукционов $\alpha_i = 0$, и получается в точности аукцион второй цены.

Если другие агенты говорят $\mathbf{x}_{-i}$, то прибыль агента i от ставки z_i:

$$Q^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_i - M_i^V(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \sum_{j=1}^N Q_j^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_j - W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}).$$

Здесь $Q^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_i$ — ожидание дохода агента, а $M_i^V(z_i, \mathbf{x}_{-i})$ — ожидание выплаты агента. Вычитаемое от z не зависит, а уменьшаемое по определению $\mathbf{Q}^*$ максимизируется, когда i говорит правду. Значит, аукцион VCG *правдив*.

Мы много уже свойств знаем у правдивых механизмов. В частности, ожидаемая доходность:

$$U_i^V(x_i) = \mathbf{E}[W(x_i, \mathbf{X}_{-i}) - W(\alpha_i, \mathbf{X}_{-i})]$$

будет возрастающей и выпуклой функцией. $U_i^V(\alpha_i) = 0$ и, по монотонности мы получаем, что VCG *рационален.*

2.2.3. *Эффективность.* Пусть есть другой механизм, который тоже эффективен, правдив и рационален. Тогда, по принципу эквивалентности доходности, его доходность U_i отличается от U_i^V на константу. Но если $U_i(\alpha_i) < U_i^V(\alpha_i) = 0$, то механизм будет нерациональным (у агента i с ценностью α_i отрицательная ожидаемая доходность). Значит, $U_i(z) > U_i^V(z)$, т.е. другой механизм больше даёт агентам; при одинаковом распределении $\mathbf{Q}^*$ это значит, что агенты платят меньше.

Теорема 2. *Среди всех механизмов, которые распределяют один объект и являются эффективными, правдивыми и рациональными, механизм VCG максимизирует ожидаемые выплаты каждого агента.*

На самом деле даже максимизируя выплаты, VCG всё равно не может добиться того, чтобы баланс сходился, то есть сумма выплат всех агентов равнялась нулю. Мы сейчас рассмотрим другой алгоритм, в нём баланс будет сходиться, но не будет рациональности.

Ещё нужно понимать, что механизм VCG при всех своих хороших свойствах может оказаться совершенно нереалистичен. Надо решать сложную задачу оптимизации. Это не всегда можно сделать быстро. Задача сделать *вычислительно эффективный* механизм, то есть механизм, который бы, например, работал полиномиально долго, — это совсем другая задача. Аналогично для оптимальных механизмов.

3. AGV и budget balance

3.1. **Механизм AGV.**

3.1.1. *Budget balance.* Мы бы хотели, чтобы у наших механизмов *сходился баланс* (budget balance property). Иначе говоря, чтобы они могли существовать без внешних вливаний. Формально это выражается как

$$\sum_{i=1}^{N} M_i(\mathbf{x}) = 0,$$

т.е. сумма выплат всех агентов равна нулю.

3.1.2. *Механизм AGV.* AGV — от Arrow–d'Aspremont–Gérard-Varet. Это тоже не совместная работа, а две разных:

- Arrow (1979).
- d'Aspremont и Gérard-Varet (1979).

Этот механизм тоже эффективен (то есть использует правило распределения$\mathbf{Q}^*$). Его выплаты $\mathcal{M}^A$ определяются как

$$M_i^A(\mathbf{x}) = \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\mathbf{E}_{\mathbf{X}_{-j}}[W_{-j}(x_j, \mathbf{X}_{-j})] - \mathbf{E}_{\mathbf{X}_{-i}}[W_{-i}(x_i, \mathbf{X}_{-i})].$$

То есть физический смысл примерно таков, что каждый агент, можно сказать, компенсирует каждому другому агенту свое присутствие на аукционе. Тогда очевидно, что баланс данного механизма сходится, поскольку каждое ожидание входит в сумму один раз с плюсом и один раз с минусом:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i^A(\mathbf{x}) = 0.$$

Покажем, что механизм AGV правдив: если другие агенты говорят $\mathbf{x}_{-i}$, а агент i говорит z_i, он получает

$$\mathbf{E}_{\mathbf{X}_{-i}}[Q_i^*(z_i, \mathbf{X}_{-i}) + W_{-i}(z_i, \mathbf{X}_{-i})] - \mathbf{E}_{\mathbf{X}_{-i}}\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\mathbf{E}_{\mathbf{X}_{-j}}[W_{-j}(X_j, \mathbf{X}_{-j})]\right].$$

Первое слагаемое $Q_i^*(z_i, \mathbf{X}_{-i})$ — доход агента, из которого вычитается выплата агента. Вычитаемое ожидание не зависит от z_i, а первое ожидание максимизируется при $z_i = x_i$, поэтому механизм действительно правдив.

3.2. **Budget balance у хороших механизмов.**

Теорема 3. *Эффективный, правдивый и рациональный механизм, у которого сходится баланс, существует тогда и только тогда, когда механизм VCG даёт положительную ожидаемую прибыль аукционеру.*

3.2.1. *Доказательство.* В одну сторону тривиально: VCG должен давать прибыль, потому что он самый эффективный. Нам нужно доказать в другую сторону: предъявить конструкцию такого механизма со сходящимся балансом в том случае, когда VCG даёт прибыль.

Возьмём за основу механизм AGV. Принцип эквивалентности доходности нам говорит, что есть такие константы c_i^A, что ожидаемая доходность

$$U_i^A(x_i) = \mathbf{E}[W(x_i, \mathbf{X}_{-i})] - c_i^A.$$

Для VCG это тоже верно: существуют такие константы c_i^V, что

$$U_i^V(x_i) = \mathbf{E}[W(x_i, \mathbf{X}_{-i})] - c_i^V.$$

Однако, механизм AGV пока что не является рациональным, для этого модифицируем его. Дано, что VCG приносит прибыль:

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} M_i^V(\mathbf{X})\right] \geq 0.$$

Поскольку AGV по определению имеет сходящийся баланс, то его ожидание прибыли равно нулю:

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} M_i^V(\mathbf{X})\right] \geq \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} M_i^A(\mathbf{X})\right] = 0.$$

Или, в терминах наших констант,

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^V \geq \sum_{i=1}^{N} c_i^A.$$

Введём теперь специальные поправки: для $i = 2..N$

$$d_i = c_i^A - c_i^V,\ d_1 = -\sum_{i=2}^{N} d_i.$$

Тогда искомым механизмом будет механизм AGV с нашими поправками:

$$M_i(\mathbf{x}) = M_i^A(\mathbf{x}) + d_i.$$

Очевидно, баланс всё так же сходится (поскольку это $\mathbf{M}^A$, подправленный на константы, которые в сумме дают 0). Механизм правдивый, потому что выплаты агента отличаются от выплат правдивого $\mathbf{M}^A$ на константу.

Осталось только проверить, что он рациональный, то есть ожидание дохода каждого агента больше нуля.

Для $i \neq 1$

$$U_i(x_i) = U_i^A(x_i) + d_i = U_i^A(x_i) + c_i^A - c_i^V = U_i^V(x) \geq 0.$$

Для первого агента всё то же самое, нужно только заметить, что

$$d_1 = -\sum_{i=2}^{N} d_i = \sum_{i=2}^{N} (c_i^V - c_i^A) \geq c_1^A - c_1^V,$$

так как общая сумма $\sum_{i=1}^{N} c_i^V \geq \sum_{i=1}^{N} c_i^A$.

Таким образом, мы сделали такой эффективный правдивый рациональный механизм, у которого сходится баланс. То есть деньги остаются между агентами, участвующими в аукционе, но каждый из них рассчитывает, что что-то выиграет.