# Конспект лекции 8. Аукционы с зависимыми ценностями.

Сергей Николенко*

29 июля 2008 г.

## Содержание



# 1 Постановка задачи

## 1.1 Ценности и сигналы

В данной лекции рассматривается новый тип аукционов — *аукционы с зависимыми ценностями.* Напомним вкратце классическую постановку задачи дизайна аукционов. Имеется некоторый ценный *лот*, который выставляется на торги *продавцом.* В торгах участвует $N$ *агентов*, каждый из которых желает приобрести лот за как можно меньшую цену. При этом обладание лотом принесет агенту $i$ пользу $v_i$ — это так называемая *внутренняя ценность для агента $i$.*

Рассмотрим следующее обобщение: пусть теперь каждый агент не знает точного значения своей ценности, но знает ее примерно. А именно, агент $i$ знает значение некоторого случайного *неточного сигнала (noisy signal)* $X_i$ из диапазона $[0, \omega_i]$. Ценность лота для агента $i$ является некоторой функцией от сигналов всех агентов: $V_i = v_i(X_1, X_2, \dots, X_N)$. При этом она

*Законспектировал Искандер Акишев.

также является случайной величиной (так как случайными являются все сигналы $X_i$).

Таким образом, теперь цености всех агентов оказываются связанными друг с другом посредством неточных сигналов.

Существует также модификация аукциона с зависимыми ценностями, в которой кроме неточных сигналов агентов $x_i$ есть еще неточный сигнал $S$, который известен только продавцу. При этом $v_i(x_1, \ldots, x_N) = \mathbf{E}_S[V_i | X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N]$. В таком случае интересен вопрос о том, имеет ли смысл (для увеличения матожидания своего дохода) продавцу сообщать известный ему неточный сигнал $S$ агентам, или нет.

Далее мы будем рассматривать первый, более простой случай. Будем по умолчанию полагать, что $v_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, и что $E[V_i] < \infty$. Кроме того, будем считать, что агенты *нейтральны к риску*, то есть каждый из них хочет максимизировать матожидание величины $V_i - p_i$, где $p_i$ - цена, которую придется заплатить за обладание лотом.

Частным случаем аукционов с зависимыми ценностями являются аукционы в которых существует некоторая *общечеловеческая ценность* $V = v(X_1, \ldots, X_N)$, а сигналы отдельных агентов $X_i$ распределены вокруг нее (то есть $\mathbf{E}[X_i | V = v] = v$). Типичный жизненный пример такой ситуации — аукционы по разработке месторождений. Точный доход от разработки некоторого месторождения примерно одинаковый для всех и никому заранее неизвестен, но у потенциальных покупателей могут быть примерные его оценки. Поэтому такая модель часто называется “*mineral rights model*”.

### "Проклятье победителей"

В описанной выше ситуациивозникает так называемое *"проклятье победителей"(winner's curse).* Так как $V$ — это, грубо говоря, среднее значение среди всех $X_i$, то наибольшее из $X_i$ будет переоценивать $V$. Для примера рассмотрим аукцион первой цены.

Как только агенту сообщают, что он выиграл аукцион, он понимает, что скорее всего переоценивал значение $V$ (так как остальные агенты, в таком случае, очевидно, оценивали его меньшим значением). Возможно, что стоимость, которую заплатит агент-победитель, будет даже превышать значение $V$, то есть в итоге он останется в убытке.

По этой причине в аукционе первой цены участники должны делать определённую поправку и немного занижать заявляемую стоимость лота. Далее будут показаны конкретные стратегии для различных типов аукционов.

Стоит отметить, что winner's curse зависит от количества участников $N$. А именно, чем больше агентов участвуют в аукционе, тем больше ожидание максимума среди всех оценок стоимости лота, и тем хуже в среднем приходится победителю.

### Аукцион второй цены и английский аукцион

Ещё одним следствием зависимости сигналов является тот факт, что теперь аукцион второй цены и английский (восходящий) аукцион перестают быть эквивалентными. Это связано с тем, что в восходящем аукционе у участников, которые остаются активными, по ходу проведения аукциона появляется новая дополнительная информация — ставки участников, выходящих из аукциона. (а именно, значения стоимости лота в моменты времени, когда эти участники говорили "пас"). Исходя из этих ставок активные участники могут пытаться оценить скрытые сигналы пасующих агентов. Если в случае аукциона с частными независимыми ценностями они не играли никакой роли, то теперь эти значения могут повлиять на собственные оценки ценности лота оставшихся в игре агентов.

## 1.2 Аффилированные сигналы

Теперь мы откажемся от предположения, что распределения $X_i$ независимы, и будем считать, что они могут быть коррелированными. В таком случае появляется единая совместная плотность $f(\mathbf{X})$, не равная $\prod_i f_i(X_i)$. Мы будем предполагать, что сигналы $X_1, X_2, \dots X_N$ *аффилированны.*

**Определение 1.** *Случайные величины* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ *называются* ***аффилированными****, если* $\forall\ \mathbf{x}', \mathbf{x}''$*:*

$$p(\mathbf{x}' \vee \mathbf{x}'')p(\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'') \geq p(\mathbf{x}')p(\mathbf{x}''),$$

*где*

$$\mathbf{x}' \vee \mathbf{x}'' = (\max(x'_1, x''_1), \dots, \max(x'_N, x''_N)$$
$$\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'' = (\min(x'_1, x''_1), \dots, \min(x'_N, x''_N)$$

Аффилированность это более строгая форма положительной корреляции. По сути она означает, что если некоторая часть значений $X_i$ велика, то остальные значения также скорее всего будут велики.

Рассмотрим еще одно определение:

**Определение 2.** *Функция* $f$ *называется* ***супермодулярной****, если* $\forall\ \mathbf{x}', \mathbf{x}''$*:*

$$f(\mathbf{x}' \vee \mathbf{x}'') + f(\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'') \geq f(\mathbf{x}') + f(\mathbf{x}'')$$

Из этого определения следует, что компоненты вектора случайных величин $\mathbf{X}$ аффилированы тогда и только тогда, когда $\ln p$ супермодулярна (Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно прологарифмировать равенство из определения аффилированной функции).

**Замечание 1.** *Для гладких функций* $f$ *супермодулярность эквивалентна тому, что* $\forall\ i \neq j$ *выполнено:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \geq 0$$

Рассмотрим переменные $Y_1, \dots, Y_{N-1}$, которые использовались в предыдущих лекциях. Напомним, что они представляют собой сигналы $X_2, \dots, X_N$, упорядоченные в порядке убывания значений.

Совместная плотность $g$ величин $X_1, Y_1, \dots, Y_{N-1}$ выражается через совместную плотность вектора сигналов $\mathbf{X}$ следующим образом:

$$g(x_1, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}) = \begin{cases} (n-1)! p(x_1, y_1, \dots, y_{N-1}), & y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{N-1} \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если переменные $X_1, X_2, \ldots, X_N$ аффилированы, то аффилированными также будут и $X_1, Y_1, \ldots, Y_{N-1}$.

Рассмотрим две переменные — $X$ и $Y$ с совместной плотностью $f : [0,\omega]^2 \to \mathbb{R}$. Если $X$ и $Y$ аффилированы, то

$$\forall\ x' \geq x, y' \geq y \quad f(x',y)f(x,y') \leq f(x,y)f(x',y')$$

Преобразуем это соотношение:

$$\frac{f(x,y')}{f(x,y)} \leq \frac{f(x',y')}{f(x',y)}$$
$$\frac{f(y'|x)f(x)}{f(y|x)f(x)} \leq \frac{f(y'|x')f(x')}{f(y|x')f(x')}$$
$$\frac{f(y'|x)}{f(y|x)} \leq \frac{f(y'|x')}{f(y|x')}.$$

Последнее равенство означает, что функция *отношения правдоподобия (likelihood ratio)*:

$$\frac{f(\cdot|x')}{f(\cdot|x)}$$

возрастает для всех $x' \geq x$ (*monotone likelihood ratio property*).

При выполнении этого свойства говорят, что $F(\cdot|x')$ доминирует над $F(\cdot|x)$ в терминах отношения правдоподобия. Из выполнения этого условия следует справедливость множества интересных свойств.

Пусть $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(y)}{g(y)}$ для всех $x < y$. Это эквивалентно тому, что $\frac{f(y)}{f(x)} \geq \frac{g(y)}{g(x)}$. Проинтегрировав последнее выражение, получаем:

$$\forall x \quad \int_x^\omega \frac{f(y)}{f(x)}dy \geq \int_x^\omega \frac{g(y)}{g(x)}dy,$$

или, что то же самое:

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} \geq \frac{1-G(x)}{g(x)}$$

При выполнении такого условия говорят, что $F$ *доминирует над* $G$ *в терминах доли риска* ($\lambda$, *hazard rate*).

Пусть $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(y)}{g(y)}$ для всех $x < y$. Это эквивалентно тому, что $\frac{f(x)}{f(y)} \leq \frac{g(x)}{g(y)}$. Снова взяв интеграл, получаем:

$$\forall x \quad \int_0^y \frac{f(x)}{f(y)}dx \geq \int_0^y \frac{g(x)}{g(y)}dx,$$

или,

$$\frac{F(y)}{f(y)} \geq \frac{G(y)}{g(y)}$$

В таком случае говорят, что $F$ *доминирует над* $G$ *в терминах обратной доли риска* ($\sigma$, *reverse hazard rate*).

Обозначим долю риска распределения $F$, как $\lambda_F(t)$. Тогда, как известно, $F(x)$ можно выразить следующим образом: $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}$.

Из этого выражения следует, что при выполнении неравенства $\lambda_F \leq \lambda_G$ верно также, что $F(x) \leq G(x)$ для всех значений $x$.

Для $F = F(\cdot|x')$ и $G = F(\cdot|x)$ из доминирования в терминах прямой и обратной доли риска следует ещё и так называемое *стохастическое доминирование*. Оно означает, что для всех $y$ функция $F(y|\cdot)$ неубывает.

Таким образом, если случайные величины $X$ и $Y$ аффилированы, то, следовательно, $F(y|\cdot)$ неубывает. А это означает, что условное матожидание $\mathbf{E}[Y|X = x]$ неубывает, как функция от $x$. Из этого следует, что в таком случае величины $X$ и $Y$ положительно коррелируют.

На самом деле верно и более общее утверждение, а именно: для всякой неубывающей функции $\gamma$ $\mathbf{E}[\gamma(Y)|X = x]$ неубывает от $x$.

Итак, вернёмся теперь к нашим аукционам. Если сигналы агентов $X_1, \ldots, X_N$ аффилированы, то, следовательно, $X_1, Y_1, \ldots, Y_{N-1}$ также будут аффилированы.

Пусть $X_1$ и $Y_1$ аффилированы. Если $G(\cdot|x)$ — это распределение $Y_1$, то при условии, что $X_1 = x$, и $x' > x$, $G(\cdot|x')$ доминирует над $G(\cdot|x)$ в терминах обратной доли риска:

$$\frac{g(y|x')}{G(y|x')} \leq \frac{g(y|x)}{G(y|x)}.$$

Более того, для всякой возрастающей функции $\gamma$, если $x' > x$, то

$$\mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq \mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x].$$

Вот такие следствия удается извлечь из свойства аффилированности неточных сигналов агентов.

## 1.3 Симметричная модель

Как и в случае обычных аукционов с независимыми ценностями, далее мы будем рассматривать ситуацию, в которой все агенты находятся в симметричных условиях. В случае, когда у каждого агента была лишь своя, независимая индивидуальная ценность, симметричность означала, что все ценности, как случайные величины, берутся из одного и того же распределения.

В случае зависимых и аффилированных сигналов симметричность понимается двояко. С одной стороны, это симметричность функций ценностей агентов $v_i$, а с другой — симметричность распределения случайных сигналов.

Итак, мы будем полагать, что все $X_i$ берутся из одного и того же интервала $[0, \omega]$, а, кроме того, есть единая для всех агентов функция:

$$v_i(\mathbf{X}) = u(X_i, \mathbf{X}_{-i}),$$

*симметричная* относительно последних $N - 1$ переменных. Также будем считать, что плотность совместной вероятности $f$, определенная на множестве $[0, \omega]^N$, также является симметричной функцией, и что сигналы аффилированы.

Определим одну важную функцию:

$$v(x, y) = \mathbf{E}[V_1|X_1 = x, Y_1 = y].$$

Она представляет собой не что иное, как ожидание дохода игрока 1, при условии, что его скрытый сигнал $x_1 = x$ является наивысшим, а наивысший среди всех остальных сигналов равен $y$. Вследствие симметричности модели, функция $v$ одинакова для всех игроков. Так как $\mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq \mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x]$, то, следовательно, $v$ неубывает от своих переменных. Кроме того, так как $u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, то $v(0,0) = 0$.

# 2 Симметричное равновесие в различных аукционах

## 2.1 Аукцион второй цены

Для начала отыщем симметричное равновесие в моедеи аукциона второй цены.

**Теорема 1.** *В аукционе второй цены симметричное равновесие достигается при выборе следующей стратегии:*

$$\beta^{II}(x) = v(x,x).$$

*Доказательство.* Пусть остальные агенты играют по стратегии $\beta = \beta^{II}$. Вычислим ожидание дохода агента 1 с сигналом $x$, при условии, что он поставит $b$ в качестве своей ставки:

$$\Pi(b,x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x,y) - \beta(y))g(y|x)dy = \\ = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x,y) - v(y,y))g(y|x)dy.$$

Здесь $g(\cdot|x)$ — плотность $Y_1 = \max_{i\neq 1} X_i$ при условии $X_1 = x$.

Так как $v$ возрастает по своему первому аргументу, то, следовательно, $v(x,y) < v(y,y)$ для всех $y > x$. Таким образом, максимум ожидания дохода достигается при использовании $\beta^{-1}(b) = x$, или, что то же самое, при $b = \beta(x)$. □

**Пример 1.** *Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, $Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}$, и все $X_i$ при условии $V = v$ равномерно распределены на отрезке $[0, 2v]$ и независимы.*

*Плотность распределения $X_i$ при условии $V = v$ равна $\frac{1}{2v}$ на $[0,2v]$. Следовательно, совместное распределение $(V, \mathbf{X})$ будет равно $\frac{1}{8v^3}$ на множестве $\{(V,\mathbf{X})|X_i \leq 2V\}$.*

*Заметим, что вся информация, которую мы можем узнать про $V$, зная значения $X_i$, это то, что $V \geq \frac{1}{2}Z$. Значит, совместная плотность $\mathbf{X}$ равна:*

$$p(x_1,x_2,x_3) = \int_{\frac{1}{2}z}^{1} \frac{1}{8v^3}dv = \frac{4-z^2}{16z^2},$$

*где $z = \max\{x_1, x_2, x_3\}$.*

*Следовательно, $p(V|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = p(V|Z = z)$, и на интервале $[\frac{1}{2}z, 1]$ имеем*

$$p(v|Z = z) = \frac{p(v,z)}{p(z)} = \frac{1}{8v^3}\frac{16z^2}{4-z^2}.$$

*Таким образом,*

$$\mathbf{E}[V|\mathbf{X}=\mathbf{x}] = \mathbf{E}[V|Z=z] = \int_{\frac{1}{2}z}^{1} vf(v|\mathbf{X}=\mathbf{x})dv = \frac{2z}{2+z}.$$

*А это означает, что*

$$v(x,y) = \mathbf{E}[V|X_1=x, Y_1=y] = \mathbf{E}[V|Z=\max\{x,y\}] = \frac{2\max\{x,y\}}{2+\max\{x,y\}},$$

*следовательно,*

$$\beta^{II}(x) = v(x,x) = \frac{2x}{2+x}.$$

## 2.2 Английский аукцион

В английском аукционе дополнительным источником информации для агента является то, когда другие агенты выходят из игры. В зависимости от этого, стратегии активных участников аукциона могут меняться по ходу его проведения.

В таком случае, симметрическая равновесная стратегия превращается в набор $\beta = (\beta^N, \beta^{N-1}, \ldots, \beta^2)$ из $N-1$ функции. Каждая его компонента $\beta^k$ представляет собой функцию $N-k$ переменных $\beta^k(x, p_{k+1}, \ldots, p_N)$ — цену на которой игрок 1 должен выйти из игры, при условии, что его сигнал равен $x$, в игре остались ещё $k$ агентов, а цены остальных вышедших составляли $p_{k+1} \geq p_{k+2} \geq \ldots \geq p_N$.

Опишем следующую стратегию для агентов. Во-первых, вначале, когда все агенты еще активны положим:

$$\beta^N(x) = u(x, x, \ldots, x).$$

Заметим, что $\beta^N$ непрерывна и возрастает.

Пусть агент $N$ выходит из аукциона на цене $p_N$. Тогда положим

$$\beta^{N-1}(x, p_N) = u(x, \ldots, x, x_N),$$

где $x_N$ — такое значение сигнала, что $\beta^N(x_N) = p_N$ (оно всегда единственно, так как $\beta^N$ непрерывна и возрастает).

По аналогичному принципу строятся остальные $\beta^k$. А именно, если из игры вышли агенты с номерами $N, \ldots, k+1$, то

$$\beta^k(x, p_{k+1}, \ldots, p_N) = u(x, \ldots, x, x_{k+1}, \ldots, x_N),$$

где $x_{k+1}$ определяется из условия $\beta^{k+1}(x_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_N) = p_{k+1}$.

Неформально, смысл описаной стратегии заключается в сдедующем. Всякий раз игрок определяет, стоит ли ему продолжать игру при текущей ставке $p$. Он спрашивает себя: “Что будет, если я сейчас выиграю аукцион?”. Это возможно лишь в том случае, когда все остальные агенты прямо сейчас, на ставке $p$ решат выйти из игры. Предполагая, что они действуют по аналогичной стратегии, можно определить их скрытые сигналы $y$ из условия:

$$\beta^k(y, p_{k+1}, \ldots, p_N) = p.$$

А зная скрытые сигналы всех агентов, можно определить ценность объекта $u(x, y, \ldots, y, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_N)$. Очевидно, что продолжать игру стоит тогда и только тогда, когда эта ценность больше, чем $p$.

**Теорема 2.** *Описанная выше стратегия $\beta$ является симметричной равновесной для английского аукциона.*

*Доказательство.* Пусть $X_1 = x$, и все остальные агенты, кроме первого, играют по стратегии $\beta$.

Рассмотрим значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}$.

Пусть $Y_j$ таковы, что агент 1 при следовании стратегии $\beta$ выигрывает объект (то есть $x > y_1$). В этом случае, цена, которую заплатит первый агент, — это цена, на которой из аукциона выходит агент с сигналом $y_1$, то есть $u(y_1, y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Так как $x > y_1$, то выгода игрока 1 будет положительной:

$$u(x, y_1, \ldots, y_N) - u(y_1, y_1, \ldots, y_N) > 0.$$

Так как игрок 1 не может повлиять на цену, которую ему придется заплатить, то лучшего результата, чем от использования стратегии $\beta$, ему в этом случае все равно не добиться.

Если же агент 1 не выигрывает вещь при использовании $\beta$ (то есть если $x < y_1$), то в случае, если он всё-таки решит выиграть аукцион, его доход будет отрицательным:

$$u(x, y_1, \ldots, y_N) - u(y_1, y_1, \ldots, y_N) < 0.$$

Таким образом, игроку 1 никогда не выгодно отклоняться от $\beta$. □

Особенность описанного выше равновесия заключается в том, что оно зависит только от оценочной функции $u$ и никак не зависит от распределения сигналов $f$. Таким образом, для каждого конкретного $u$ равновесие $\beta$ не сместится, если изменить распределение сигналов.

В таком случае говорят, что стратегии $\beta$ образуют равновесие *ex post*. Такое равновесие в частности обеспечивает свойство *отсутствия сожаления* (*no regret*). Это свойство означает, что даже если после завершения торгов все агенты раскроют точные значения своих сигналов, то никто из них не будет жалеть о своем выборе стратегии: выигравший агент останется с положительной выгодлй, а проигравшие поймут, что даже если бы они повысили ставку и выиграли аукцион, они остались бы в убытке.

## 2.3 Аукцион первой цены

Далее рассмотрим симметричную равновесную стратегию в аукционе первой цены. Сперва, как и ранее, выведем ее эвристически.

Обозначим через $\beta$ искомую равновесную стратегию, а через $G(\cdot|x)$ — распределение $Y_1$ при условии $X_1 = x$. Плотность данного распределения будем обозначать, соответственно, как $g(\cdot|x)$.

Тогда ожидаемый доход агента 1 при его собственном сигнале, равном $x$, и ставке $\beta(x)$ составляет:

$$\Pi(z, x) = \int_0^z (v(x, y) - \beta(z)) g(y|x) dy = \\ = \int_0^z v(x, y) g(y|x) dy - \beta(z) G(z|x).$$

Исходя из условия оптимальности, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$(v(x,z) - \beta(z))g(z|x) - \beta'(z)G(z|x) = 0.$$

При симметричном равновесии $z = x$, то есть:

$$\beta'(x) = (v(x,x) - \beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}.$$

Кроме того, $\beta(0) = 0$.

**Теорема 3.** *В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается при использовании следующей стратегии:*

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x),$$

*где*

$$L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}.$$

*Доказательство.* Во-первых, покажем, что $L(\cdot|x)$ является функцией распределения на интервале $[0,x]$. Из-за аффилированности для всех $t > 0$

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \geq \frac{g(t|0)}{G(t|0)}.$$

Таким образом,

$$-\int_0^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt \leq -\int_0^x \frac{g(t|0)}{G(t|0)}dt = -\int_0^x \frac{d}{dt}(\ln G(t|0))dt =$$
$$= \ln G(0|0) - \ln G(x|0) = -\infty.$$

Следовательно, $L(0|x) = 0$. Кроме того, $L(x|x) = 1$ и $L(\cdot|x)$ неубывает.

Из аффилированности сигналов следует, что $L(\cdot|x') \leq L(\cdot|x)$ для $x' > x$. Так как $v(y,y)$ возрастает, как функция от $y$, то $\beta = \beta^I$ также возрастает, как функция от $x$.

Рассмотрим теперь агента, который делает ставку $\beta(z)$ при скрытом сигнале $x$. Так как $\beta$ возрастает,

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z))g(y|x)dy.$$

Продифференцировав предыдущее выражение по $z$, получаем:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = (v(x,z) - \beta(z))g(z|x) - \beta'(z)G(z|x) =$$
$$= G(z|x)\left((v(x,z) - \beta(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)} - \beta'(z)\right).$$

Рассмотрим случай $z < x$. Так как $v(x,z) > v(z,z)$ и сигналы аффилированы, следовательно:

$$\frac{g(z|x)}{G(z|x)} > \frac{g(z|z)}{G(z|z)},$$

а значит:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} > G(z|x)\left((v(x,z)-\beta(z))\frac{g(z|z)}{G(z|z)}-\beta'(z)\right)=0.$$

Аналогично, в случае, когда $z > x$, можно показать, что $\frac{\partial \Pi}{\partial z} < 0$. Из этого следует, что $\Pi(z,x)$ максимизируется в точке $z = x$. $\square$

Полученный результат является, обобщением предыдущих результатов. Так, при частных значениях $v(y,y) = y$, а при независимых сигналах $G(\cdot|x) = G(\cdot)$. Следовательно,

$$L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t)}{G(t)}dt} = \frac{1}{G(x)}G(y).$$

**Пример 2.** *Рассмотрим случайные величины $S_1, S_2, T$, равномерные и независимые на интервале $[0,1]$. Пусть в аукционе участвуют два агента с неточными сигналами $X_1 = S_1 + T$ и $X_2 = S_2 + T$, а общая ценность лота вычисляется следующим образом: $V = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.*

*Наличие $T$ обеспечивает аффилированность сигналов $X_1$ и $X_2$. Так как участника всего два, то $Y_1 = X_2$.*

*Совместная плотность $X_1$ и $Y_1$ (рис. 1) вычисляется отдельно на разных треугольных участках.*

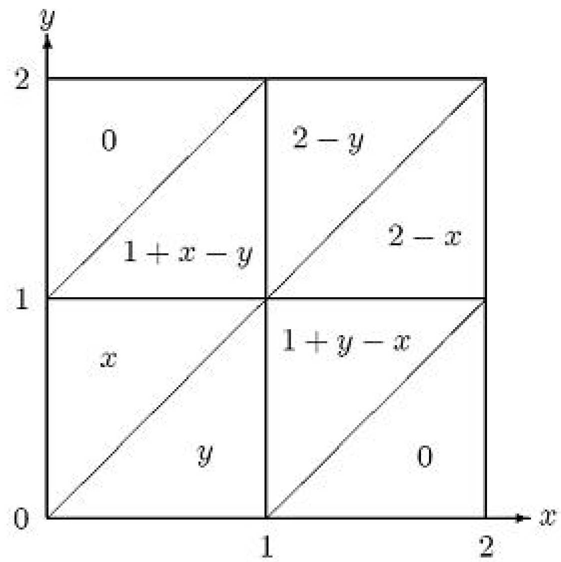


*Рис. 1. Совместная плотность величин $X_1$ и $Y_1$.*

*Путем несложных вычислений можно показать, что для всех $x \in [0,2]$*

$$\frac{g(x|x)}{G(x|x)} = \frac{2}{x},$$

*а для всех $y \in [0, x]$*

$$L(y|x) = \frac{y^2}{x^2}.$$

*Тогда, из доказанной теоремы получается, что оптимальная равновесная стратегия в данном случае имеет следующий вид:*

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x) = \frac{2}{3}x,$$

*с учётом того, что $v(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$.*

# 3 Сравнение доходов и эффективность

Далее будет сравнена доходность трех описанных типов аукционов в случае, когда агенты действуют в рамках симметричной равновесной стратегии. При наличии аффилированных сигналов и зависимых ценностей уже не действует принцип эквивалентности доходности. Далее будет показано, что английский аукцион превосходит по доходности аукцион второй цены, который, в свою очередь, превосходит аукцион первой цены.

## 3.1 Английский аукцион против аукциона второй цены

**Теорема 4.** *Ожидаемый доход от английского аукциона не превосходит ожидаемый доход от аукциона второй цены.*

*Доказательство.* В аукционе второй цены равновесие достигается при использовании стратегии $\beta^{II}(x) = v(x,x)$, где $v(x,y) = \mathbf{E}[V_1|X_1 = x, Y_1 = y]$. Для случая $x > y$,

$$\begin{aligned}v(y,y) = \mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 = y, Y_1 = y] = \\ = \mathbf{E}[u(Y_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 = y, Y_1 = y] \leq \\ \leq \mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 = x, Y_1 = y].\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что $u$ возрастает, и сигналы аффилированы.

Доход в данном случае вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[R^{II}] = \mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 > Y_1] = \mathbf{E}[v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1] \leq \\ \leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 = x, Y_1 = y]|X_1 > Y_1] = \\ = \mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 > Y_1] = \\ = \mathbf{E}[\beta^2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1})] = \mathbf{E}[R^{\text{Eng}}].\end{aligned}$$

Здесь через $\beta^2$ обозначена стратегия для английского аукциона, в случае, когда в игре остаются два агента. Цена, на которой предпоследний агент в английском аукционе выходит из игры — это и есть цена, которую заплатит победитель. □

Стоит отметить тот факт, что английский аукцион дает строго большую доходность, чем аукцион второй цены, только в том случае, когда одновременно присутствуют и зависимость значений и аффилированность сигналов. Для независимых сигналов *или* индивидуальных значений эти два аукциона эквивалентны.

## 3.2 Аукцион второй цены против аукциона первой цены

**Теорема 5.** *Ожидаемый доход от аукциона второй цены не меньше ожидаемого дохода от аукциона первой цены.*

*Доказательство.* В аукционе первой цены выплата равна в точности ставке победителя $\beta^I(x)$. В аукционе второй цены ожидание выплаты выигравшего агента с сигналом $x$ равно $\mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x]$.

Покажем, что второе выражение не превосходит первое. Так как вероятность того, что агент с сигналом $x$ выиграет аукцион, равна в обоих случаях (это просто вероятность того, что сигнал $x$ окажется наибольшим), то из этого факта будет следовать доказательство теоремы.

$$\mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] = \mathbf{E}[v(Y_1, Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] =$$
$$= \int_0^x v(y, y) dK(y|x)$$

где для всех $y < x$
$$K(y|x) = \frac{1}{G(x|x)} G(y|x).$$

Вспомним, что $K(\cdot|x)$ — функция распределения на отрезке $[0, x]$. Кроме того,
$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y, y) dL(y|x)$$
также является функцией распределения на отрезке $[0, x]$.

Далее мы докажем, что для всех $y < x$ $K(y|x) \leq L(y|x)$, или, иными словами, $K(y|x)$ стохастически доминирует над $L(y|x)$. Поскольку $v$ возрастает, из этого факта будет следовать утверждение теоремы.

Для установления стохастического доминирования, вспомним, что из аффилированности сигналов следует, что для всех $t < x$ $G(\cdot|x)$ доминирует над $G(\cdot|t)$ в терминах обратной доли риска. Таким образом:

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \leq \frac{g(t|x)}{G(t|x)}.$$

Значит, для всех $y < x$:

$$-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} dt \geq -\int_y^x \frac{g(t|x)}{G(t|x)} dt = -\int_y^x \frac{d}{dt}(\ln G(t|x)) dt =$$
$$= \ln G(y|x) - \ln G(x|x) = \ln\left(\frac{G(y|x)}{G(x|x)}\right).$$

Осталось применить к обеим частям полученного равенства экспоненту, чтобы получить требуемый результат. □

**Пример 3.** *Вспомним предыдущий пример: пусть случайные величины* $S_1, S_2, T$ *равномерны и независимы на* $[0, 1]$. *Имеются два участника с сигналами* $X_1 = S_1 + T$ *и* $X_2 = S_2 + T$ *и общая ценность* $V = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.

*Так как участника всего два, то* $Y_1 = X_2$, $v(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$, *следовательно, для аукциона второй цены равновесной будет стратегия* $\beta^{II}(x) = x$. *Ожидание дохода в этом случае будет следующим:*

$$\mathbf{E}[R^{II}] = \mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \mathbf{E}[\min\{S_1, S_2\}] + \mathbf{E}[T] = \frac{5}{6}.$$

*В случае аукциона первой цены* $\beta^I(x) = \frac{2}{3}x$, *а соответствующее ожидание дохода*

$$\mathbf{E}[R^I] = \mathbf{E}[\max\{\frac{2}{3}X_1, \frac{2}{3}X_2\}] = \frac{2}{3}\mathbf{E}[\min\{S_1, S_2\}] + \frac{2}{3}\mathbf{E}[T] = \frac{7}{9}.$$

*Таким образом, как и ожидалось,* $\mathbf{E}[R^{II}] > \mathbf{E}[R^I]$.

### Итоги

Итак, между математическими ожиданиями доходов аукцилнов первой и второй цены и английского аукциона выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{E}[R^{\mathrm{Eng}}] \geq \mathbf{E}[R^{II}] \geq \mathbf{E}[R^I].$$

В начале лекции упоминалось, что в аукционе первой цены агенту необходимо занижать заявленную цену, чтобы избежать "проклятья победителя".

**Теорема 6.** *В аукционе первой цены имеет место "проклятье победителя", то есть*

$$\beta^I(x) < \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 < x].$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\beta^I(x) &= \int_0^x v(y,y)dL(y|x) \leq \\ &\leq \int_0^x v(y,y)dK(y|x) \leq \\ &\leq \int_0^x v(x,y)dK(y|x) = \\ &= \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 < x]\end{aligned}$$

Первое неравенство следует из того, что $K(\cdot|x)$ стохастически доминирует над $L(\cdot|x)$, а второе — из того, что $v(\cdot, y)$ возрастает. □

**Теорема 7.** *В аукционе второй цены также имеет место "проклятье победителя".*

*Доказательство.*

$$\mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1) | X_1 = x, Y_1 < x] = \int_0^x v(y,y)dK(y|x) \leq \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 < x]$$

□

## 3.3 Эффективность

Для всех трех рассмотренных выше аукционов с зависимыми ценностями найденные нами симметричные равновесные стратегии оказались возрастающими относительно неточного сигнала. Это означает, что при этих стратегиях побеждает всегда тот игрок, у которого наибольший сигнал.

Напомним, что аукцион называется *эффективным*, если лот всегда достается агенту, для которого он представляет наибольшую ценность (не зависимо от того, является ли сигнал этого агента наибольшим, или нет).

Оказывается, что полученные нами симметрические равновесные стратегия могут вовсе не быть эффективными. Рассмотрим следующий пример:

**Пример 4.** *Пусть имеется двое агентов, ценности лота для которых вычисляются следующим образом:*

$$v_1(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$$

$$v_2(x_1, x_2) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$$

*В данном случае $v_1 > v_2$ тогда и только тогда, когда $x_2 > x_1$. Таким образом, у агента с более низкой ценностью сигнал будет выше, а значит, вещь достанется ему.*

Как видно из примера, практически все формы аукционов могут быть неэффективными.

**Определение 3.** *Говорят, что ценности удовлетворяют* ***условию одного пересечения*** *(single crossing condition), если для всех $i \neq j$ и всех $\mathbf{x}$ выполняется соотношение:*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \geq \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Это условие носит такое название, потому что из него следует, что если зафиксировать сигналы всех агентов, кроме $i$, то $v_i$ как функция от сигнала $x_i$ в каждой точке будет круче, чем $v_j$. Таким образом, они будут пересекаться не более одного раза.

В случае симметричной модели с зависимыми ценностями $v_i(\mathbf{x}) = u(x_i, \mathbf{x}_{-i})$, и $u$ симметрична от последних $N-1$ аргументов. Обозначим через $u'_j$ частную производную $u$ относительно $j$-го аргумента. В данном случае для выполнения условия одного пересечения достаточно убедиться, что для всех $j \neq 1$ $u'_1 \geq u'_j$. более того, в силу симметричности $u$, достаточно лишь выполнения условия $u'_1 \geq u'_2$.

Условие одного пересечения гарантирует, что фактические (ex post) значения ценности лота для всех агентов будут упорядочены так же, как и их сигналы. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $x_i > x_j$. Определим прямую, проходящую через точки $(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij})$ и $(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij})$:

$$\alpha(t) = (1-t)(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij}) + t(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij}).$$

Используя фундаментальную теорему для вычисления линейных интегралов, можно записать:

$$u(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij}) = u(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij}) + \int_0^1 \nabla u(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt,$$

где

$$\nabla u(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = u_1'(\alpha(t))(x_i - x_j) + u_2'(\alpha(t))(x_j - x_i) \geq 0,$$

так как $x_i > x_j$ и $u_1' \geq u_2'$.

Таким образом, при $x_i > x_j$ ценность для агента $i$, $u(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij})$, не меньше, чем ценность для агента $j$, $u(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij})$.

Тем самым мы доказали следующее утверждение:

**Теорема 8.** *Пусть для симметричных зависимых ценностей и аффилированных сигналов выполняется условие одного пересечения. Тогда симметричные равновесия для аукционов первой цены, второй цены и английского аукциона являются эффективными.*