БАЙЕСОВСКИЙ ВЫВОД ДЛЯ МОНЕТКИ

Сергей Николенко

СПбГУ — Санкт-Петербург

09 сентября 2023 г.

Random facts:

- 9 сентября 9 г. (9.9.9) Публий Квинтилий Вар потерял свои легионы в битве при Тевтобургском лесу; чтобы избежать плена, Вар покончил с собой, но вернуть легионы Октавиану так и не смог
- 9 сентября 1543 г. Мария Стюарт была коронована в Стирлингском замке и стала королевой Шотландии; королеве на тот момент было девять месяцев от роду
- 9 сентября 1937 г. в «Правде» была опубликована «Кантата о Сталине» М.И. Инюшкина: «О Сталине мудром, родном и любимом прекрасную песню слагает народ...»
- 9 сентября 1947 г. Грейс Хоппер прикрепила к своей дневниковой записи моль, которая замкнула цепь в компьютере Mark II; говорят, что отсюда и пошло слово bug в компьютерном смысле, но на самом деле его употреблял ещё Эдисон
- 9 сентября 1984 г. в Москве начался матч между чемпионом мира Анатолием Карповым и претендентом Гарри Каспаровым; «безлимитный поединок» был прерван 15 февраля 1985 года при счёте 5:3 в пользу Карпова при 40 ничьих
- 9 сентября 2001, в 01:46:40 по Гринвичу, часы отсчитали миллиардную секунду эры UNIX, которая началась в полночь 1 января 1970 года

Байесовский вывод для монетки

ML vs. MAP

- Мы остановились на том, что в статистике обычно ищут *гипотезу максимального правдоподобия* (maximum likelihood):

$$\theta_{ML} = \arg\max_\theta p(D \mid \theta).$$

- В байесовском подходе ищут *апостериорное распределение* (posterior)

$$p(\theta|D) \propto p(D|\theta)p(\theta)$$

  и, возможно, *максимальную апостериорную гипотезу* (maximum a posteriori):

$$\theta_{MAP} = \arg\max_\theta p(\theta \mid D) = \arg\max_\theta p(D \mid \theta)p(\theta).$$

Постановка задачи

- Простая задача вывода: дана нечестная монетка, она подброшена N раз, имеется последовательность результатов падения монетки. Надо определить её «нечестность» и предсказать, чем она выпадет в следующий раз.

Постановка задачи

- Если у нас есть вероятность $p_h = \theta$ того, что монетка выпадет орлом (вероятность решки $p_t = 1 - \theta$), то вероятность того, что выпадет последовательность s, которая содержит n орлов и m решек, равна

$$p\left(s|p_h = \theta\right) = \theta^n (1-\theta)^m.$$

- Сделаем предположение: будем считать, что вероятность монетки до экспериметов для нас распределена равномерно, т.е. у нас нет априорных предпочтений насчёт θ.
- Теперь нужно использовать теорему Байеса и вычислить скрытые параметры.

Пример применения теоремы Байеса

- Правдоподобие: $p\left(\theta|s\right) = \frac{p(s|\theta)p(\theta)}{p(s)}$.
- Здесь $p(\theta)$ следует понимать как непрерывную случайную величину, сосредоточенную на интервале $[0, 1]$, коей она и является. Наше предположение о равномерном распределении в данном случае значит, что априорная вероятность $p(\theta) = 1$, $\theta \in [0, 1]$ (т.е. априори мы не знаем, насколько нечестна монетка, и предполагаем это равновероятным). А $p\left(s|\theta\right)$ мы уже знаем.
- Итого получается:

$$p\left(\theta|s\right) = \frac{\theta^n(1-\theta)^m}{p(s)}.$$

Пример применения теоремы Байеса

- Итого получается:

$$p\left(\theta|s\right) = \frac{\theta^n(1-\theta)^m}{p(s)}.$$

- $p(s)$ можно подсчитать как

$$p(s) = \int_0^1 \theta^n(1-\theta)^m d\theta = \\ = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!},$$

но найти $\arg\max_\theta p(\theta \mid s) = \frac{n}{n+m}$ можно и без этого.

Пример применения теоремы Байеса

- Итого получается:

$$p\left(\theta|s\right) = \frac{\theta^n(1-\theta)^m}{p(s)}.$$

- Но это ещё не всё. Чтобы предсказать следующий исход, надо найти $p\left(\text{heads}|s\right)$:

$$p(\text{heads}|s) = \int_0^1 p(\text{heads}|\theta)p(\theta|s)d\theta =$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta^{n+1}(1-\theta)^m}{p(s)}dp_h =$$

$$= \frac{(n+1)!m!}{(n+m+2)!} \cdot \frac{(n+m+1)!}{n!m!} = \frac{n+1}{n+m+2}.$$

- Получили правило Лапласа.

Пример применения теоремы Байеса

- Итого получается:

$$p\left(\theta|s\right) = \frac{\theta^n(1-\theta)^m}{p(s)}.$$

- Это была иллюстрация двух основных задач байесовского вывода:
  (1) найти апостериорное распределение (posterior distribution) на гипотезах/параметрах:

$$p(\theta \mid D) \propto p(D|\theta)p(\theta)$$

  и/или найти максимальную апостериорную гипотезу (maximum a posteriori) $\theta_{\mathrm{MAP}} = \arg\max_\theta p(\theta \mid D)$;
  (2) найти предсказательное распределение (predictive distribution) исходов дальнейших экспериментов:

$$p(x \mid D) \propto \int_{\theta\in\Theta} p(x \mid \theta)p(D|\theta)p(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Ещё немного о вероятностях

О болезнях и вероятностях

- Приведём классический пример из классической области применения статистики — медицины.
- Пусть некий тест на какую-нибудь болезнь имеет вероятность успеха 95% (т.е. 5% — вероятность как позитивной, так и негативной ошибки).
- Всего болезнь имеется у 1% респондентов (отложим на время то, что они разного возраста и профессий).
- Пусть некий человек получил позитивный результат теста (тест говорит, что он болен). С какой вероятностью он действительно болен?

О болезнях и вероятностях

- Приведём классический пример из классической области применения статистики — медицины.
- Пусть некий тест на какую-нибудь болезнь имеет вероятность успеха 95% (т.е. 5% — вероятность как позитивной, так и негативной ошибки).
- Всего болезнь имеется у 1% респондентов (отложим на время то, что они разного возраста и профессий).
- Пусть некий человек получил позитивный результат теста (тест говорит, что он болен). С какой вероятностью он действительно болен?
- Ответ: 16%.

Доказательство

- Обозначим через t результат теста, через d — наличие болезни.
- $p(t=1) = p(t=1|d=1)p(d=1) + p(t=1|d=0)p(d=0)$.
- Используем теорему Байеса:

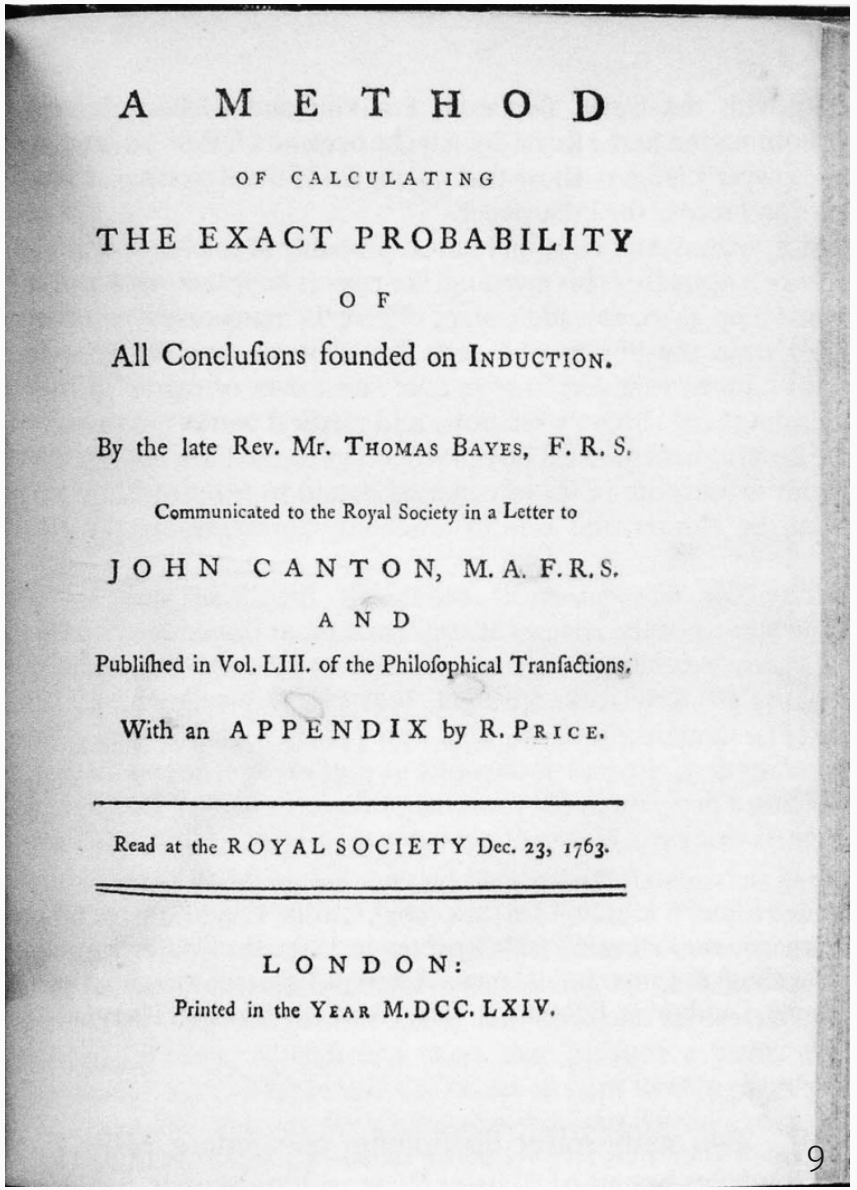
$$p(d=1|t=1) =$$

$$= \frac{p(t=1|d=1)p(d=1)}{p(t=1|d=1)p(d=1) + p(t=1|d=0)p(d=0)} =$$

$$= \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} = 0.16.$$

Вывод

- Вот такие задачи составляют суть вероятностного вывода (probabilistic inference).
- Поскольку они обычно основаны на теореме Байеса, вывод часто называют байесовским (Bayesian inference).
- Но не только поэтому.



A METHOD

OF CALCULATING

THE EXACT PROBABILITY

OF

All Conclusions founded on INDUCTION.

By the late Rev. Mr. THOMAS BAYES, F. R. S.

Communicated to the Royal Society in a Letter to

JOHN CANTON, M. A. F. R. S.

AND

Published in Vol. LIII. of the Philosophical Transactions.

With an APPENDIX by R. PRICE.

Read at the ROYAL SOCIETY Dec. 23, 1763.

LONDON:

Printed in the YEAR M.DCC.LXIV.

Упражнения

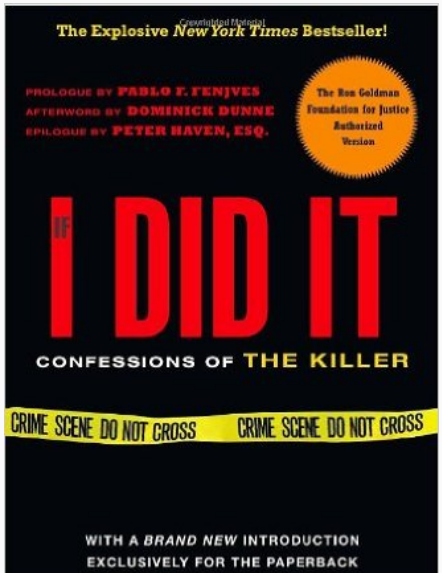
1. У моего знакомого два ребёнка. Будем предполагать, что пол ребёнка выбирается независимо и равновероятно, с вероятностью $\frac{1}{2}$. Две постановки вопроса:
   (1) я спросил, есть ли у него мальчики, и он ответил «да»; какова вероятность того, что один из детей – девочка?
   (2) я встретил одного из его детей, и это мальчик; какова вероятность того, что второй ребёнок – девочка?

Упражнения

2. Произошло убийство. На месте убийства найдена кровь, которая явно принадлежит убийце. Кровь принадлежит редкой группе, которая присутствует у 1% населения, в том числе у подсудимого.
   (1) Прокурор говорит: «Шанс, что у подсудимого была бы именно такая группа крови, если бы он был невиновен – всего 1%; значит, с вероятностью 99% он виновен». В чём не прав прокурор?
   (2) Адвокат говорит: «В городе живёт миллион человек, то есть у 10000 из них такая группа крови. Значит, всё, что говорит нам эта кровь – это что подсудимый совершил убийство с вероятностью 0.01%; никакое это не доказательство». В чём не прав адвокат?

Упражнения

3. Реальные случаи.
   (1) Прокурор указал, что O.J. Simpson уже бил жену в прошлом. Адвокат ответил: «Убивают только одну из 2500 женщин, подвергавшихся семейному насилию, так что это вообще нерелевантно». Суд согласился с адвокатом; верно ли это рассуждение?
   (2) У Sally Clark погибли два младенца; прокурор указал, что вероятность двух случаев SIDS в одной семье, которую он получил из статистики одиночных случаев, — около 1 из 73 миллионов; в чём он не прав?



Сопряжённые распределения

априорные

Напоминание

- Напоминаю, что основная наша задача – как обучить параметры распределения и/или предсказать следующие его точки по имеющимся данным.
- В байесовском выводе участвуют:
  - $p(x \mid \theta)$ – правдоподобие данных;
  - $p(\theta)$ – априорное распределение;
  - $p(x) = \int_\Theta p(x \mid \theta) p(\theta) d\theta$ – маргинальное правдоподобие;
  - $p(\theta \mid x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}$ – апостериорное распределение;
  - $p(x' \mid x) = \int_\Theta p(x' \mid \theta) p(\theta \mid x) d\theta$ – предсказание нового x'.
- Задача обычно в том, чтобы найти $p(\theta \mid x)$ и/или $p(x' \mid x)$.

Априорные распределения

- Когда мы проводим байесовский вывод, у нас, кроме правдоподобия, должно быть ещё *априорное распределение* (prior distribution) по всем возможным значениям параметров.
- Мы раньше к ним специально не присматривались, но они очень важны.
- Задача байесовского вывода – как подсчитать $p(\theta \mid x)$ и/или $p(x' \mid x)$.
- Но чтобы это сделать, сначала надо выбрать $p(\theta)$. Как выбирать априорные распределения?

Сопряжённые априорные распределения

- Разумная цель: давайте будем выбирать распределения так, чтобы они оставались такими же и *a posteriori*.
- До начала вывода есть априорное распределение $p(\theta)$.
- После него есть какое-то новое апостериорное распределение $p(\theta \mid x)$.
- Я хочу, чтобы $p(\theta \mid x)$ тоже имело тот же вид, что и $p(\theta)$, просто с другими параметрами.

Сопряжённые априорные распределения

- Не слишком формальное определение: семейство распределений $p(\theta \mid \alpha)$ называется семейством *сопряжённых априорных распределений* для семейства правдоподобий $p(x \mid \theta)$, если после умножения на правдоподобие апостериорное распределение $p(\theta \mid x, \alpha)$ остаётся в том же семействе: $p(\theta \mid x, \alpha) = p(\theta \mid \alpha')$.
- α называются *гиперпараметрами* (hyperparameters), это «параметры распределения параметров».
- Тривиальный пример: семейство всех распределений будет сопряжённым чему угодно, но это не очень интересно.

Сопряжённые априорные распределения

- Разумеется, вид хорошего априорного распределения зависит от вида распределения собственно данных, $p(x \mid \theta)$.
- Сопряжённые априорные распределения подсчитаны для многих распределений, мы приведём несколько примеров.

Испытания Бернулли

- Каким будет сопряжённое априорное распределение для бросания нечестной монетки (испытаний Бернулли)?
- Ответ: это будет бета-распределение; плотность распределения нечестности монетки θ

$$p(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}.$$

Испытания Бернулли

- Плотность распределения нечестности монетки θ

$$p(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}.$$

- Тогда, если мы посэмплируем монетку, получив s орлов и f решек, получится

$$p(s, f \mid \theta) = \binom{s+f}{s}\theta^s(1-\theta)^f, \text{ и}$$

$$p(\theta|s, f) = \frac{\binom{s+f}{s}\theta^{s+\alpha-1}(1-\theta)^{f+\beta-1}/B(\alpha, \beta)}{\int_0^1 \binom{s+f}{s}x^{s+\alpha-1}(1-x)^{f+\beta-1}/B(\alpha, \beta)dx} =$$

$$= \frac{\theta^{s+\alpha-1}(1-\theta)^{f+\beta-1}}{B(s+\alpha, f+\beta)}.$$

Испытания Бернулли

- Итого получается, что сопряжённое априорное распределение для параметра нечестной монетки θ – это

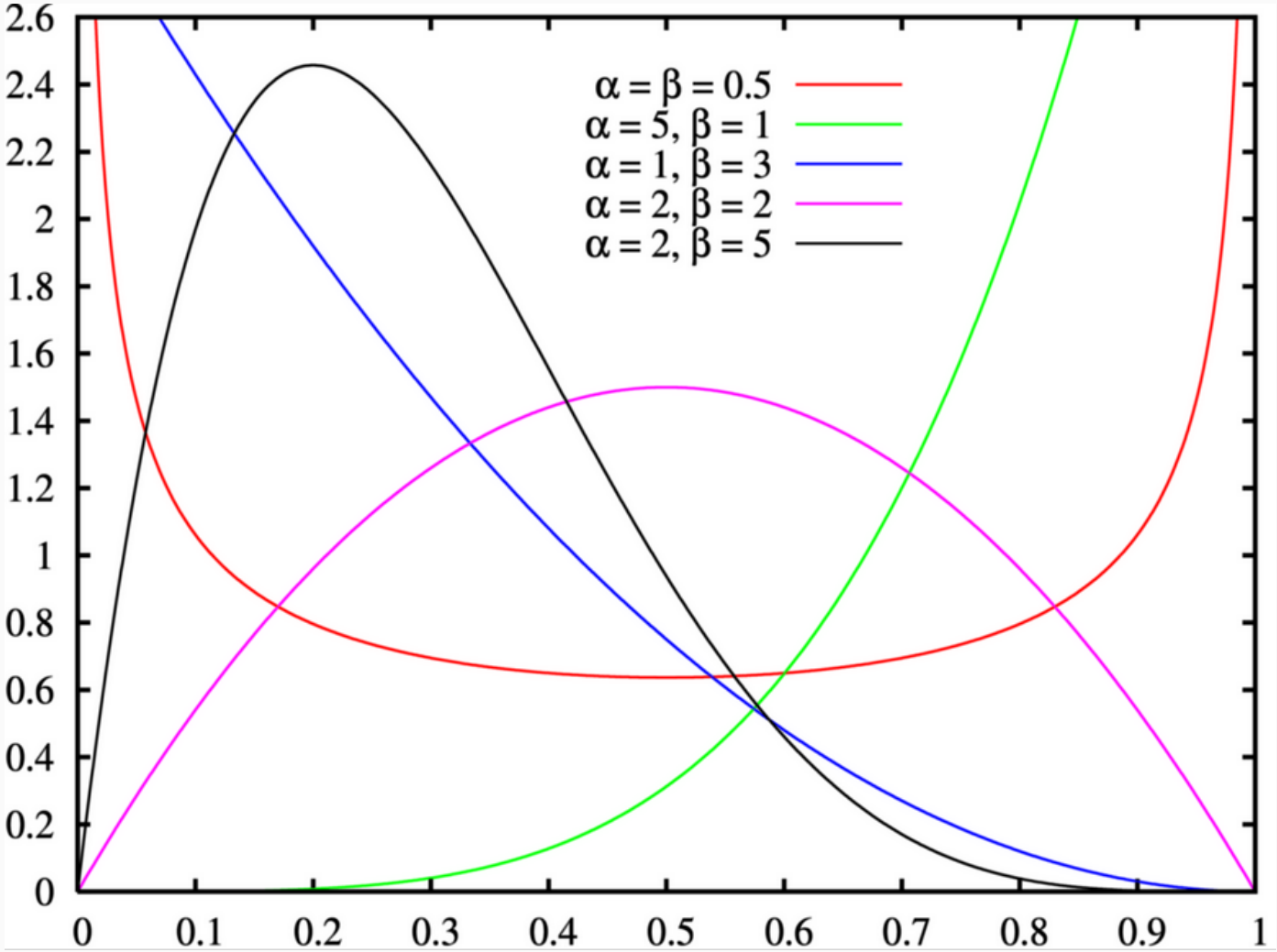
$$p(\theta \mid \alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}.$$

- После получения новых данных с s орлами и f решками гиперпараметры меняются на

$$p(\theta \mid s+\alpha, f+\beta) \propto \theta^{s+\alpha-1}(1-\theta)^{f+\beta-1}.$$

- На этом этапе можно забыть про сложные формулы и выводы, получилось очень простое правило обучения (под обучением теперь понимается изменение гиперпараметров).

Бета--распределение



Мультиномиальное распределение

- Простое обобщение: рассмотрим мультиномиальное распределение с n испытаниями, k категориями и по x_i экспериментов дали категорию i.
- Параметры θ_i показывают вероятность попасть в категорию i:

$$p(x \mid \theta) = \binom{n}{x_1, \dots, x_n} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \dots \theta_k^{x_k}.$$

- Сопряжённым априорным распределением будет распределение Дирихле:

$$p(\theta \mid \alpha) \propto \theta_1^{\alpha_1 - 1} \theta_2^{\alpha_2 - 1} \dots \theta_k^{\alpha_k - 1}.$$

Мультиномиальное распределение

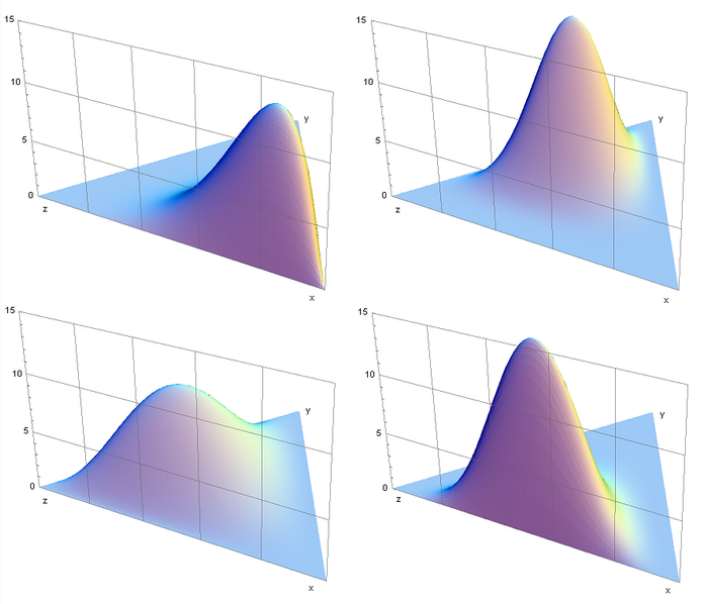
- Сопряжённым априорным распределением будет распределение Дирихле:

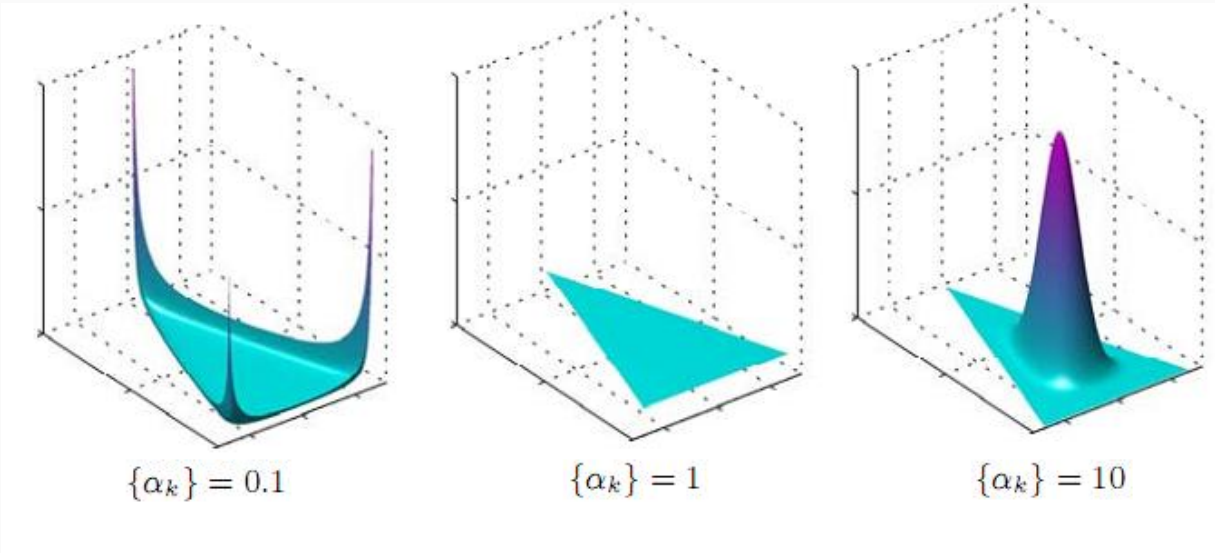
$$p(\theta \mid \alpha) \propto \theta_1^{\alpha_1 - 1} \theta_2^{\alpha_2 - 1} \dots \theta_k^{\alpha_k - 1}.$$

Упражнение. Докажите, что при получении данных $x_1, \dots, x_k$ гиперпараметры изменятся на

$$p(\theta \mid x, \alpha) = p(\theta \mid x + \alpha) \propto \theta_1^{x_1 + \alpha_1 - 1} \theta_2^{x_2 + \alpha_2 - 1} \dots \theta_k^{x_k + \alpha_k - 1}.$$

Распределение Дирихле





Спасибо!

Спасибо за внимание!