

SVM и kernel methods

Сергей Николенко



Центр Речевых Технологий, 2012



Outline

- 1 SVM и задача линейной классификации
 - Выпуклые оболочки и максимизация зазора
 - Дуальные задачи
 - Когда данные линейно неразделимы
- 2 SVM и разделение нелинейными функциями
 - Схема работы SVM
 - Функциональный анализ. Ядра
 - Резюме



Постановка задачи

- Метод опорных векторов решает задачу классификации.
- Каждый элемент данных — точка в n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$.
- Формально: есть точки x_i , $i = 1..m$, у точек есть метки $y_i = \pm 1$.
- Мы интересуемся: можно ли разделить данные $(n - 1)$ -мерной гиперплоскостью, а также хотим найти эту гиперплоскость.
- В частности, именно так мы обучали линейный перцептрон.
- Это всё?

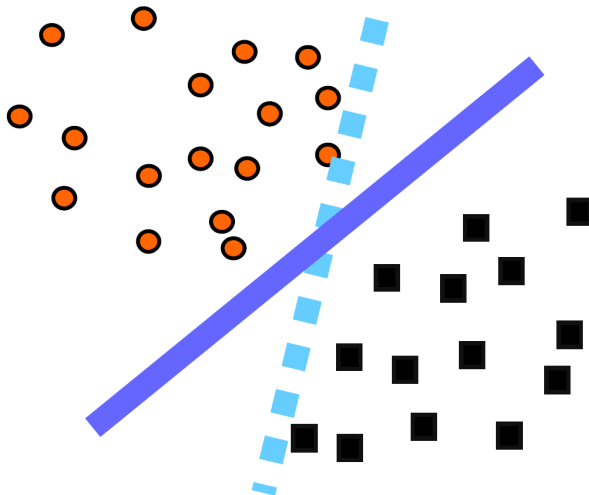


Постановка задачи

- Нет, ещё хочется научиться разделять этой гиперплоскостью *как можно лучше*.
- То есть желательно, чтобы два разделённых класса лежали как можно дальше от гиперплоскости.
- Практическое соображение: тогда от небольших возмущений в гиперплоскости ничего не испортится.



Пример





Выпуклые оболочки

- Один подход: найти две ближайшие точки в выпуклых оболочках данных, а затем провести разделяющую гиперплоскость через середину отрезка.
- Формально это превращается в задачу квадратичной оптимизации:

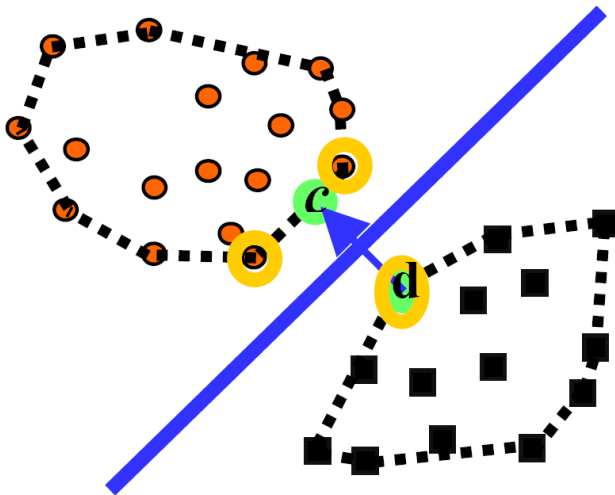
$$\min_{\alpha} \left\{ \|c - d\|^2, \text{ где } c = \sum_{y_i=1} \alpha_i x_i, d = \sum_{y_i=-1} \alpha_i x_i \right\}$$

при условии $\sum_{y_i=1} \alpha_i = \sum_{y_i=-1} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0.$

- Эту задачу можно решать общими оптимизационными алгоритмами.



Пример





Максимизация зазора

- Другой подход: максимизировать зазор (*margin*) между двумя параллельными опорными плоскостями, затем провести им параллельную на равных расстояниях от них.
- Гиперплоскость называется *опорной* для множества точек X , если все точки из X лежат под одну сторону от этой гиперплоскости.
- Формально: расстояние от точки до гиперплоскости $y(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x} + w_0 = 0$ равно $\frac{|y(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{w}\|}$.



Максимизация зазора

- Расстояние от точки до гиперплоскости $y(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x} + w_0 = 0$ равно $\frac{|y(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{w}\|}$.
- Все точки классифицированы правильно: $t_n y(\mathbf{x}_n) > 0$ ($t_n \in \{-1, 1\}$).
- И мы хотим найти

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{w}, w_0} \min_n \frac{t_n y(\mathbf{x}_n)}{\|\mathbf{w}\|} &= \\ &= \arg \max_{\mathbf{w}, w_0} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \min_n \left[t_n (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

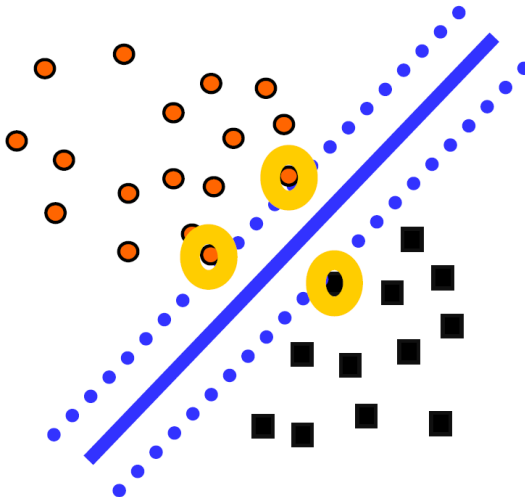


Максимизация зазора

- $\arg \max_{\mathbf{w}, w_0} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \min_n [t_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0)] \right\}$. Сложно.
- Но если перенормировать $\mathbf{w}$, гиперплоскость не изменится.
- Давайте перенормируем так, чтобы $\min_n [t_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0)] = 1$.



Пример





Максимизация зазора

- Получается тоже задача квадратичного программирования:

$$\min_{\mathbf{w}, b} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \right\} \text{ при условии } t_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0) \geq 1.$$

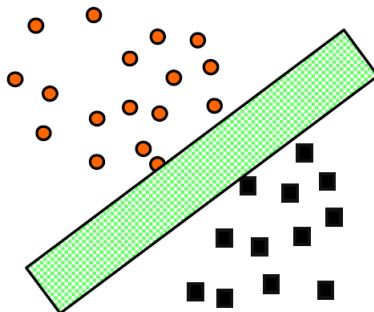
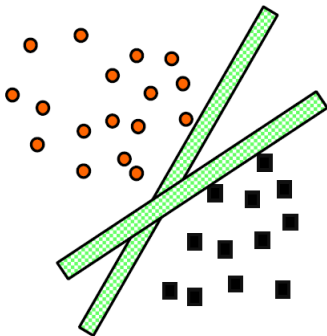


Результаты

- Результаты получаются хорошие. Такой подход позволяет находить *устойчивые* решения, что во многом решает проблемы с оверфиттингом и позволяет лучше предсказывать дальнейшую классификацию.
- В каком-то смысле в решениях с «толстыми» гиперплоскостями между данными содержится больше информации, чем в «тонких», потому что «толстых» меньше.
- Это всё можно сформулировать и доказать (позже).



Пример





Дуальные задачи

- Напомним, что такое дуальные задачи.
- Прямая задача оптимизации:

$$\min \{f(x)\} \text{ при условии } h(x) = 0, g(x) \leq 0, x \in X.$$

- Для дуальной задачи вводим параметры λ , соответствующие равенствам, и μ , соответствующие неравенствам.



Дуальные задачи

- Прямая задача оптимизации:

$$\min \{f(x)\} \text{ при условии } h(x) = 0, g(x) \leq 0, x \in X.$$

- Дуальная задача оптимизации:

$$\min \{\phi(\lambda, \mu)\} \text{ при условии } \mu \geq 0,$$

$$\text{где } \phi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \lambda^\top h(x) + \mu^\top g(x) \right\}.$$



Дуальные задачи

- Тогда, если $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ – допустимое решение дуальной задачи, а $\bar{x}$ – допустимое решение прямой, то

$$\begin{aligned}\phi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \bar{\lambda}^\top h(x) + \bar{\mu}^\top g(x) \right\} \leq \\ &\leq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^\top h(\bar{x}) + \bar{\mu}^\top g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}).\end{aligned}$$

- Это называется *слабой дуальностью* (только $\leq$), но во многих случаях достигается и равенство.



Дуальные задачи

- Для линейного программирования прямая задача:

$$\min c^\top x \text{ при условии } Ax = b, x \in X = \{x \leq 0\}.$$

- Тогда дуальная задача получается так:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \inf_{x \geq 0} \left\{ c^\top x + \lambda^\top (b - Ax) \right\} = \\ &= \lambda^\top b + \inf_{x \geq 0} \left\{ (c^\top - \lambda^\top A)x \right\} = \\ &= \begin{cases} \lambda^\top b, & \text{если } c^\top - \lambda^\top A \geq 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}\end{aligned}$$



Дуальные задачи

- Для линейного программирования прямая задача:

$$\min \left\{ c^T x \right\} \text{ при условии } Ax = b, x \in X = \{x \leq 0\}.$$

- Дуальная задача:

$$\max \left\{ b^T \lambda \right\} \text{ при условии } A^T \lambda \leq c, \lambda \text{ не ограничены.}$$



Дуальные задачи

- Для квадратичного программирования прямая задача:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x \right\} \text{ при условии } Ax \leq b,$$

где Q – положительно полуопределённая матрица (т.е. $x^\top Q x \geq 0$ всегда).

- Дуальная задача (проверьте):

$$\max \left\{ \frac{1}{2} \mu^\top D \mu + \mu^\top d - \frac{1}{2} c^\top Q^{-1} c \right\} \text{ при условии } c \geq 0,$$

где $D = -A Q^{-1} A^\top$ (отрицательно определённая матрица), $d = -b - A Q^{-1} c$.



Дуальная задача к SVM

- В случае SVM надо ввести множители Лагранжа:

$$L(\mathbf{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_n \alpha_n \left[t_n (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0) - 1 \right], \quad \alpha_n \geq 0.$$

- Берём производные по $\mathbf{w}$ и w_0 , приравниваем нулю, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sum_n \alpha_n t_n \mathbf{x}_n, \\ 0 &= \sum_n \alpha_n t_n. \end{aligned}$$



Дуальная задача к SVM

- Подставляя в $L(\mathbf{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha})$, получим

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_n \alpha_n - \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \alpha_n \alpha_m t_n t_m (\mathbf{x}_n^\top \mathbf{x}_m)$$

при условии $\alpha_n \geq 0, \sum_n \alpha_n t_n = 0$.

- Это дуальная задача, которая обычно в SVM и используется.



Предсказание и ККТ

- А для предсказания потом надо посмотреть на знак $y(\mathbf{x})$:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n t_n \mathbf{x}^\top \mathbf{x}_n + w_0.$$

- Получилось, что предсказания зависят от всех точек $\mathbf{x}_n \dots$



Предсказание и ККТ

- ...но нет. :) Условия ККТ (Karush–Kuhn–Tucker):

$$\alpha_n \geq 0,$$

$$t_n y(\mathbf{x}_n) - 1 \geq 0,$$

$$\alpha_n (t_n y(\mathbf{x}_n) - 1) = 0.$$

- Т.е. реально предсказание зависит от небольшого числа *опорных* векторов, для которых $t_n y(\mathbf{x}_n) = 1$ (они находятся собственно на границе разделяющей поверхности).



Постановка задачи

- Все эти методы работают, когда данные действительно линейно разделимы.
- А что делать, когда их всё-таки немножко не получается разделить?
- Первый вопрос: что делать для первого метода, метода выпуклых оболочек?



Редуцированные выпуклые оболочки

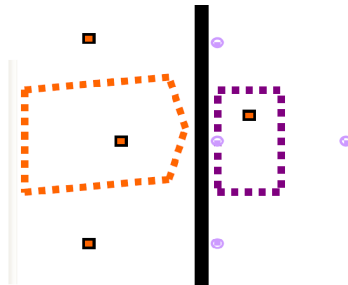
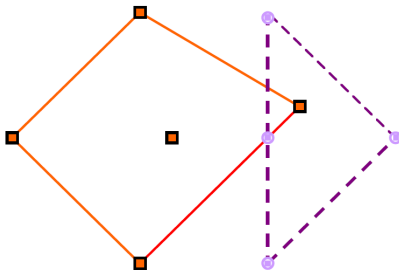
- Вместо обычных выпуклых оболочек можно рассматривать *редуцированные* (reduced), у которых коэффициенты ограничены не 1, а сильнее:

$$c = \sum_{y_i=1} \alpha_i x_i, \quad 0 \leq \alpha_i \leq D.$$

- Тогда для достаточно малых D редуцированные выпуклые оболочки не будут пересекаться.
- И мы будем искать оптимальную гиперплоскость между редуцированными выпуклыми оболочками.



Пример





Для метода опорных векторов

- Естественно, для метода опорных векторов тоже надо что-то изменить. Что?



Для метода опорных векторов

- Естественно, для метода опорных векторов тоже надо что-то изменить. Что?
- Мы просто добавим в оптимизирующуюся функцию неотрицательную ошибку (slack):

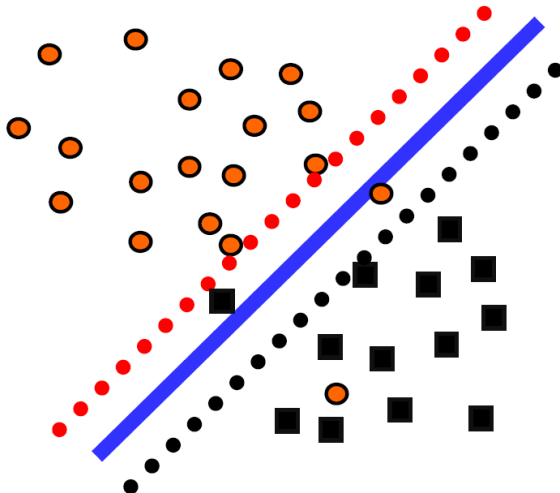
$$\min_{\mathbf{w}, w_0} \left\{ \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^m z_i \right\}$$

при условии $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i - w_0) + z_i \geq 1$.

- Это прямая задача...



Пример





Дуальная переформулировка

- ...а вот дуальная:

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i y_j \alpha_i \alpha_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^m \alpha_i, \right. \\ \left. \text{где } \sum_{i=1}^m y_i \alpha_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C. \right\}$$

- Эта формулировка чаще всего используется в теории SVM.
- Единственное отличие от линейно разделимого случая – верхняя граница C на α_j , т.е. на влияние каждой точки.



Итого

- Метод опорных векторов отлично подходит для линейной классификации.
- Решая задачу квадратичного программирования, мы получаем параметры оптимальной гиперплоскости.
- Точно так же, как и в дуальном случае, если бы мы просто искали середину между выпуклыми оболочками.



Outline

- 1 SVM и задача линейной классификации
 - Выпуклые оболочки и максимизация зазора
 - Дуальные задачи
 - Когда данные линейно неразделимы
- 2 SVM и разделение нелинейными функциями
 - Схема работы SVM
 - Функциональный анализ. Ядра
 - Резюме

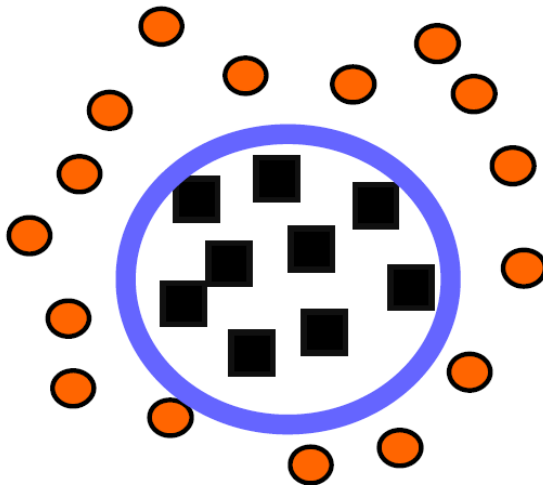


Введение

- Часто бывает нужно разделять данные не только линейными функциями.
- Что делать в таком случае?



Пример





Введение

- Часто бывает нужно разделять данные не только линейными функциями.
- Классический метод: развернуть нелинейную классификацию в пространство большей размерности (feature space), а там запустить линейный классификатор.
- Для этого просто нужно для каждого монома нужной степени ввести новую переменную.



Пример

- Чтобы в двумерном пространстве $[r, s]$ решить задачу классификации квадратичной функцией, надо перейти в пятимерное пространство:

$$[r, s] \longrightarrow [r, s, rs, r^2, s^2].$$

- Или формальнее; определим $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$:
 $\theta(r, s) = (r, s, rs, r^2, s^2)$. Вектор в $\mathbb{R}^5$ теперь соответствует квадратичной кривой общего положения в $\mathbb{R}^2$, а функция классификации выглядит как

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign}(\theta(\mathbf{w}) \cdot \theta(\mathbf{x}) - b).$$

- Если решить задачу линейного разделения в этом новом пространстве, тем самым решится задача квадратичного разделения в исходном.



Проблемы с классическим подходом

- Во-первых, количество переменных растёт экспоненциально.
- Во-вторых, по большому счёту теряются преимущества того, что гиперплоскость именно оптимальная; например, оверфиттинг опять становится проблемой.
- Важное замечание: *концептуально* мы задачу уже решили. Остались *технические* сложности: как обращаться с гигантской размерностью. Но в них-то всё и дело.



Основная идея и схема работы SVM

- Тривиальная схема алгоритма классификации такова:
 - входной вектор x трансформируется во входной вектор в feature space (большой размерности);
 - в этом большом пространстве мы вычисляем опорные векторы, решаем задачу разделения;
 - потом по этой задаче классифицируем входной вектор.
- Это нереально, потому что пространство слишком большой размерности.



Основная идея и схема работы SVM

- Оказывается, кое-какие шаги здесь можно переставить. Вот так:
 - опорные векторы вычисляются в исходном пространстве малой размерности;
 - там же они перемножаются (сейчас увидим, что это значит);
 - и только потом мы делаем нелинейную трансформацию того, что получится;
 - потом по этой задаче классифицируем входной вектор.
- Осталось теперь объяснить, что всё это значит. :)



Постановка задачи

- Напомним, что наша задача поставлена следующим образом:

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i y_j \alpha_i \alpha_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^m \alpha_i, \right.$$

$$\left. \text{где } \sum_{i=1}^m y_i \alpha_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C. \right\}$$



Постановка задачи

- Мы теперь хотим ввести некое отображение $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, $N > n$. Получится:

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i y_j \alpha_i \alpha_j (\theta(\mathbf{x}_i) \cdot \theta(\mathbf{x}_j)) - \sum_{i=1}^m \alpha_i, \right. \\ \left. \text{где } \sum_{i=1}^m y_i \alpha_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C. \right\}$$



Теория Гильберта–Шмидта–Мерсера

- Придётся немножко вспомнить (или изучить) функциональный анализ.
- Мы хотим обобщить понятие *скалярного произведения*; давайте введём новую функцию, которая (минуя трансформацию) будет сразу вычислять скалярное произведение векторов в feature space:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \theta(\mathbf{u}) \cdot \theta(\mathbf{v}).$$



Теория Гильберта–Шмидта–Мерсера

- Первый результат: любая симметрическая функция $k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L_2$ представляется в виде

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \theta_i(\mathbf{u}) \cdot \theta_i(\mathbf{v}),$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — собственные числа, а θ_i — собственные векторы интегрального оператора с ядром k , т.е.

$$\int k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \theta_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \lambda_i \theta_i(\mathbf{v}).$$



Теория Гильберта–Шмидта–Мерсера

- Чтобы k задавало скалярное произведение, достаточно, чтобы все собственные числа были положительными. А собственные числа положительны тогда и только тогда, когда (*теорема Мерсера*)

$$\iint k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) g(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} > 0$$

для всех g таких, что $\int g^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < \infty$.

- Вот, собственно и всё. Теперь мы можем вместо подсчёта $\theta(\mathbf{u}) \cdot \theta(\mathbf{v})$ в задаче квадратичного программирования просто использовать подходящее *ядро* $k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.



Теория Гильберта–Шмидта–Мерсера

- Итого задача наша выглядит так:

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i y_j \alpha_i \alpha_j k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^m \alpha_i, \right. \\ \left. \text{где } \sum_{i=1}^m y_i \alpha_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C. \right\}$$

- Просто меняя ядро k , мы можем вычислять самые разнообразные разделяющие поверхности.
- Условия на то, чтобы k была подходящим ядром, задаются теоремой Мерсера.



Примеры ядер

- Рассмотрим ядро

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

- Какое пространство ему соответствует?



Примеры ядер

- После выкладок получается:

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \\ &= \left(u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2\right) \cdot \left(v_1^2, v_2^2, \sqrt{2}v_1 v_2\right). \end{aligned}$$

- Иначе говоря, линейная поверхность в новом пространстве соответствует квадратичной поверхности в исходном (эллипс, например).



Примеры ядер

- Естественное обобщение: ядро $k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^d$ задаёт пространство, оси которого соответствуют всем *однородным* мономам степени d .
- А как сделать пространство, соответствующее произвольной полиномиальной поверхности, не обязательно однородной?



Примеры ядер

- Поверхность, описываемая полиномом степени d :

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 1)^d.$$

- Тогда линейная разделимость в feature space в точности соответствует полиномиальной разделимости в базовом пространстве.



Примеры ядер

- Нормальное распределение (radial basis function):

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = e^{-\frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2}{2\sigma}}.$$

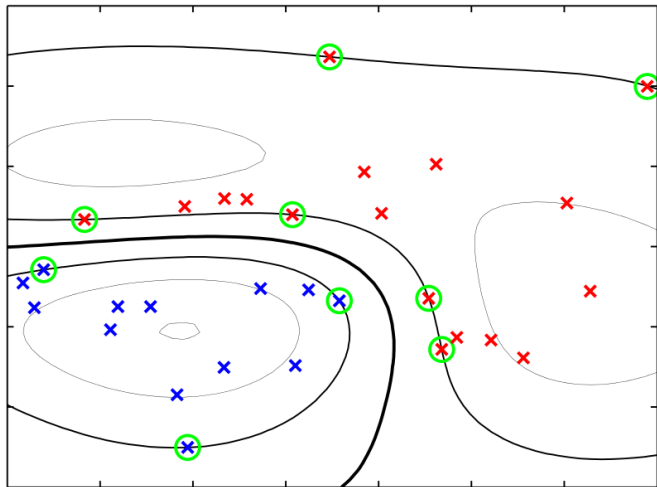
- Двухуровневая нейронная сеть:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = o(\eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + c),$$

где o — сигмоид.



Пример





Резюме

- Вот какой получается в итоге алгоритм.
 - ❶ Выбрать параметр C , от которого зависит акцент на минимизации ошибки или на максимизации зазора.
 - ❷ Выбрать ядро и параметры ядра, которые у него, возможно, есть.
 - ❸ Решить задачу квадратичного программирования.
 - ❹ По полученным значениям опорных векторов определить w_0 (как именно?).
 - ❺ Новые точки классифицировать как

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\sum_i y_i \alpha_i k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) - w_0\right).$$



ν -SVM

- Другой вариант для неразделимых данных – ν -SVM [Schölkopf et al., 2000].
- Максимизируем

$$L(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_m a_n a_m t_n t_m k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$$

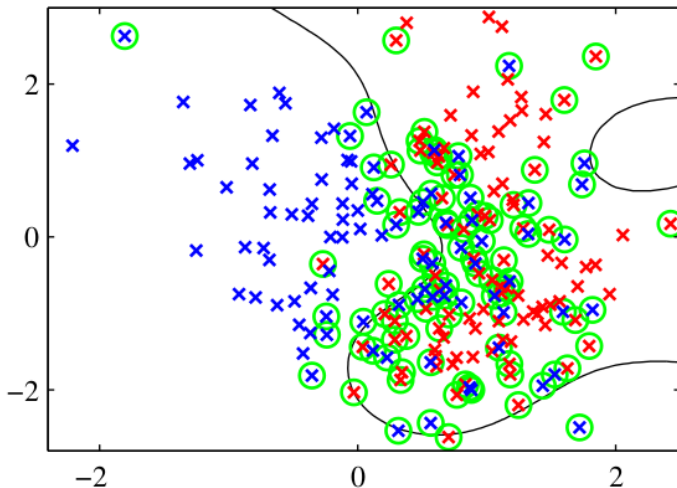
с ограничениями

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{N}, \quad \sum_n a_n t_n = 0, \quad \sum_n a_n \geq \nu.$$

- Параметр ν можно интерпретировать как верхнюю границу на долю ошибок.



SVM для классификации





Связь с логистической регрессией

- В случае SVM с возможными ошибками мы минимизируем

$$C \sum_{n=1}^N \xi_n + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2.$$

- Для точек с правильной стороны $\xi_n = 0$, с неправильной – $\xi_n = 1 - y_n t_n$.
- Так что можно записать *hinge error function* $E_{SV}(y_n t_n) = [1 - y_n t_n]_+$ и переписать как задачу с регуляризацией

$$\sum_{n=1}^N E_{SV}(y_n t_n) + \lambda \|\mathbf{w}\|^2.$$



Связь с логистической регрессией

- Вспомним логистическую регрессию и переформулируем её для целевой переменной $t \in \{-1, 1\}$: $p(t = 1 | y) = \sigma(y)$, значит, $p(t = -1 | y) = 1 - \sigma(y) = \sigma(-y)$, и $p(t | y) = \sigma(yt)$.
- И логистическая регрессия – это минимизация

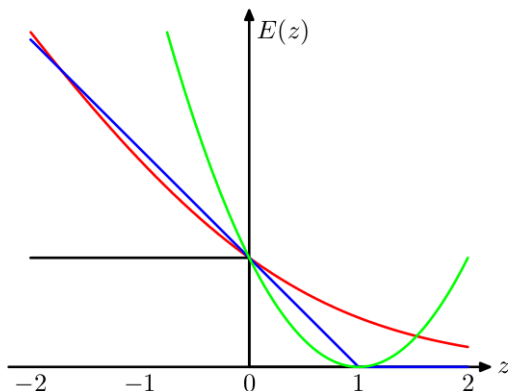
$$\sum_{n=1}^N E_{LR}(y_n t_n) + \lambda \|\mathbf{w}\|^2,$$

где $E_{LR}(y_n t_n) = \ln(1 + e^{-yt})$.



Связь с логистической регрессией

- График hinge error function, вместе с функцией ошибки для логистической регрессии:





SVM с несколькими классами

- Как обобщить SVM на несколько классов? Варианты (без подробностей):
 - 1 обучить одну против всех и классифицировать $y(\mathbf{x}) = \max_k y_k(\mathbf{x})$ (нехорошо, потому что задача становится несбалансированной, и $y_k(\mathbf{x})$ на самом деле несравнимы);
 - 2 можно сформулировать единую функцию для всех K SVM одновременно, но обучение становится гораздо медленнее;
 - 3 можно обучить попарно $K(K-1)/2$ классификаторов, а потом считать голоса – кто победит;
 - 4 DAGSVM: организуем попарные классификаторы в граф и будем идти по графу, для классификации выбирая очередной вопрос;
 - 5 есть даже методы, основанные на кодах, исправляющих ошибки.



SVM с одним классом

- SVM также можно использовать с *одним* классом.
- Как и зачем?



SVM с одним классом

- SVM также можно использовать с *одним* классом.
- Как и зачем?
- Можно при помощи SVM очертить границу области высокой плотности.
- Тем самым найдём выбросы данных (outliers).
- Задача будет такая: найти наименьшую поверхность (сферу, например), которая содержит все точки, кроме доли γ .



SVM для регрессии

- SVM можно использовать для регрессии, сохраняя свойство разреженности (т.е. то, что SVM зависит только от опорных векторов).
- В обычной линейной регрессии мы минимизировали

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - t_n)^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2.$$

- В SVM мы сделаем так: если мы попадаем в ϵ -окрестность предсказания, то ошибки, будем считать, совсем нет.



SVM для регрессии

- ϵ -insensitive error function:

$$E_{\epsilon}(y(\mathbf{x}) - t) = \begin{cases} 0, & |y(\mathbf{x}) - t| < \epsilon, \\ |y(\mathbf{x}) - t| - \epsilon & \text{иначе.} \end{cases}$$

- И задача теперь выглядит как минимизация

$$C \sum_{n=1}^N E_{\epsilon}(y(\mathbf{x}_n) - t_n) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2.$$



SVM для регрессии

- Чтобы переформулировать, нужны по две slack переменные, для обеих сторон «трубки»:

$$y(\mathbf{x}_n) - \epsilon \leq t_n \leq y(\mathbf{x}_n) + \epsilon$$

превращается в

$$t_n \leq y(\mathbf{x}_n) + \epsilon + \xi_n,$$

$$t_n \geq y(\mathbf{x}_n) - \epsilon - \hat{\xi}_n,$$

и мы оптимизируем

$$C \sum_{n=1}^N E_{\epsilon} (\xi_n + \hat{\xi}_n) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2.$$

Центр Речевых Технологий

SVM для регрессии

- Если же теперь пересчитать дуальную задачу, то получится

$$L(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_m (a_n - \hat{a}_n) (a_m - \hat{a}_m) k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) -$$

$$- \epsilon \sum_{n=1}^n (a_n + \hat{a}_n) + \sum_{n=1}^N (a_n - \hat{a}_n) t_n,$$

и мы её минимизируем по $a_n, \hat{a}_n$ с условиями

$$0 \leq a_n \leq C,$$

$$0 \leq \hat{a}_n \leq C,$$

$$\sum_{n=1}^N (a_n - \hat{a}_n) = 0.$$



SVM для регрессии

- Когда решим эту задачу, сможем предсказывать новые значения как

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N (a_n - \hat{a}_n) k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + b,$$

где b можно найти как

$$\begin{aligned} b &= t_n - \epsilon - \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_n) = \\ &= t_n - \epsilon - \sum_{m=1}^N (a_m - \hat{a}_m) k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$



SVM для регрессии

- А условия ККТ превращаются в

$$a_n (\epsilon + \xi_n + y(\mathbf{x}_n) - t_n) = 0,$$

$$\hat{a}_n (\epsilon + \hat{\xi}_n - y(\mathbf{x}_n) + t_n) = 0,$$

$$(C - a_n) \xi_n = 0,$$

$$(C - \hat{a}_n) \hat{\xi}_n = 0.$$

- Отсюда очевидно, что либо a_n , либо $\hat{a}_n$ всегда равны 0, и хотя бы один из них не равен, только если точка лежит на или за границей «трубки».
- Опять получили решение, зависящее только от «опорных векторов».



SVM для регрессии

- Но снова можно переформулировать в виде ν -SVM, в котором параметр более интуитивно ясен: вместо ширины трубки ϵ рассмотрим ν – долю точек, лежащих вне трубки; тогда минимизировать надо

$$L(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_m (a_n - \hat{a}_n) (a_m - \hat{a}_m) k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) + \sum_{n=1}^N (a_n - \hat{a}_n)$$

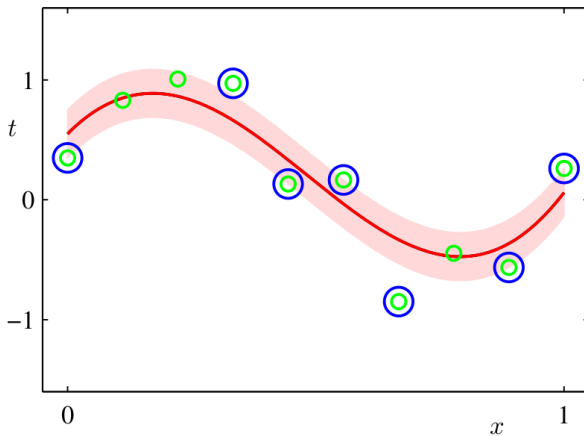
при условиях

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_n \leq \frac{C}{N}, \\ 0 &\leq \hat{a}_n \leq \frac{C}{N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (a_n - \hat{a}_n) &= 0, \\ \sum_{n=1}^N (a_n + \hat{a}_n) &\leq \nu C. \end{aligned}$$



SVM для регрессии





Thank you!

Спасибо за внимание!