ПОМИ ПРЕПРИНТ – 06-2000

ЭСКИЗ ФИНИТАРНОГО ВАРИАНТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Н. А. Шанин

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Июнь 2000 г.

ABSTRACT

N. A. Shanin. A sketch of a finitary version of mathematical analysis.

Contents. 1. On basic ideas of finitary mathematics.- 2. Particular theories of natural numbers and arithmetical algorithms as an 'environment of modeling' finitary theories of constructively definable objects of various types.- 3. Approach of R. L. Goodstein to a construction of finitary versions of initial parts of mathematical analysis.- 4. Finitary completions of elementary metric and countably metric spaces as finitary counterparts of function spaces of classical mathematics.- 5. On the theorems of finitary mathematics that have the form of majorants of theorems of 'broad' constructive mathematics.- Appendices.- Bibliography.

Supplement. N. A. Shanin. On operational approach to explanation of the sense of sentences.

Содержание*

§1. О базисных представлениях финитарной математики.

§2. Частные финитарные теории натуральных чисел и арифметических алгорифмов как ‘среда моделирования’ финитарных теорий конструктивно определяемых объектов разнообразных типов.

§3. Подход Р. Л. Гудстейна к построению финитарных вариантов начальных разделов математического анализа.

§4. Финитарные пополнения элементарных метрических и счетнометрических пространств как финитарные аналоги функциональных пространств классической математики.

§5. О теоремах финитарной математики, имеющих форму мажорант теорем ‘широкой’ конструктивной математики.

Дополнения.– Библиография.

§1. О базисных представлениях финитарной математики

1.1. В настоящее время среди математиков преобладает мнение, что канторова теория множеств (КТМ) в ее современном виде (предусматривающем, в частности, современное построение классической логики) способна играть роль интуитивно приемлемой базы разнообразных областей математики, в частности, математического анализа (МА).

С другой стороны, базисные представления теории множеств уже давно оказались объектами критического анализа. По существу это был анализ идеализаций, участвующих в формировании интуитивной основы теории множеств (в первую очередь –

*Эта статья представляет собой расширенное изложение доклада “Finitary version of mathematical analysis as a result of the development of theory of functional spaces in classical mathematics” (“Финитарный вариант математического анализа как один из результатов развития теории функциональных пространств в классической математике”),прочитанного автором 29 мая 1999 года на конференции “First St.Petersburg Days of Logic and Computability”. Изложение имеет конспективный характер. Некоторые дополнения, детали и замечания помещены в конце основного текста в разделе “Дополнения”. Ссылки на конкретные пункты этого раздела имеют вид (**Доп1**),(**Доп2**), ... Ссылки на список литературы (в конце всего текста) заключены в прямоугольные скобки.

представлений о “бесконечных совокупностях одновременно существуемых объектов”), с точки зрения ‘уровня согласованности’ принимаемых идеализацмй с результатами экспериментального исследования природы на макро-, микро- и мегауровнях детализации и ‘охвата’ в пространстве-времени.

Истоки критического отношения к интуитивному базису КТМ можно обнаружить в воззрениях некоторых мыслителей античной эпохи, не признававших приемлемыми представления о “завершенной бесконечности”. (В литературе на русском языке в этом же смысле используется термин “актуальная бесконечность”, но его трудно признать удачным.) Формированию такой точки зрения способствовало отсутствие среди результатов ‘экспериментального освоения’ природы (во всяком случае – при доступном в ту эпоху уровне детализации и ‘охвата’ в пространстве-времени) таких данных, которые свидетельствовали бы о наличии в природе хотя бы одной ‘реализации’ представлений о *бесконечных* совокупностях одновременно существующих объектов какого-либо отчетливо охарактеризованного типа. Способствовало и возникновение ‘на уровне чистого мышления’ парадоксов (в частности,‘не укладывалось в голове’ представление о ‘составленности’ прямолинейного отрезка, обладающего положительной длиной, из отдельных точек). В то же время, ‘интуитивные мотивировки’ некоторых умозаключений, применявшихся (например) в доказательствах геометрических теорем, фактически апеллируют к ‘запретным’ представлениям (в частности, через применения закона исключенного третьего).

Отвергая представления о завершенной бесконечности, математики и философы античной эпохи признавали допустимыми представления о “потенциальной бесконечности”. Последние возникают как при рассмотрении некоторых ‘развертывающихся во времени’ процессов, так и при рассмотрении некоторых процедур. Например, в первой книге классического труда Евклида “Начала” постулат 2 формулируется так: “...ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой”.

1.2. В эпоху становления дифференциального и интегрального исчислений сложилась еще более ‘запутанная’ ситуация, образно охарактеризованная в [Cour & Robb 1941] следующими словами: “Логически точное мышление, отправляющееся от отчетливых определений и непротиворечивых ‘очевидных’ аксиом, казалось несущественным новым пионерам математической науки. Предавшись подлинной оргии интуитивных догадок, сплетая убедительные заключения с бессмысленным мистицизмом, *слепо доверяясь сверхчеловеческой силе формальных процедур* (выделено мной – Н. Ш.), они завоевали математический мир, полный несметных богатств. Постепенно экстаз прогресса уступил место духу критического самоконтроля. В XIX столетии постоянная необходимость консолидировать науку ⟨...⟩ привела к ревизии основ новой математики".

Ревизия основ, начатая Больцано, Коши и Вейерштрассом, побуждала к поискам базисных представлений (в первую очередь – в математическом анализе), способных в какой-то мере удовлетворить потребность в 'отчетливости'. Предложенная Г.Кантором система понятий, использующая в качестве интуитивной базы представления о "бесконечных совокупностях одновременно существующих объектов", привлекла внимание многих математиков в качестве одного из вариантов, претендовавших на удовлетворение такой потребности. Потребность в 'отчетливости' была столь насущной, что многие математики согласились 'не замечать' того, что этот вариант фактически отвергает результаты глубокого анализа проблемы, выполненного мыслителями античной эпохи, и предлагает формировать базисные представления на основе весьма идеализированных и поверхностных аналогий с представлениями, формирующимися при рассмотрении 'обозримых' конечных совокупностей реальных предметов и оперировании над такими совокупностями. (**Доп1**)

1.3. Уже в начале интенсивного распространения КТМ на новые и новые области математики вопрос об 'уровне фантастичности' некоторых абстракций, используемых в КТМ, о допускаемом при их формировании 'уровне произвола воображения' вновь оказался предметом дискуссий. (**Доп2**)

Возникшая в конце XIX и в начале XX столетий дискуссия, о которой сейчас идет речь, существенно отличалась от дискуссий о завершенной бесконечности в предшествующие эпохи тем, что основные 'действующие лица' новой дискуссии стремились дополнять свою критику *поисками и предложениями альтернатив* (в первую очередь – альтернативных вариантов оснований математического анализа). Участниками такой 'двухсторонней' деятельности были (в первую очередь) выдающиеся математики конца XIX века и первой половины XX столетия Л. Кронекер, А. Пуанкаре, Л. Э. Я. Брауэр, Г. Вейль, Д. Гильберт (в середине XX столетия этот список продолжил А. А. Марков), плодотворно работавшие также над проблемами теоретической механики и физики и в силу этого неизбежно подходившие к анализу оснований математики с 'ощущениями' участников процесса познания природы.

Общую направленность поисков альтернатив подсказывало то обстоятельство, что в приложениях математики типичны задачи, в которых как исходные данные, так и искомые решения, представляют собой 'конкретные информации' о некоторых объектах (в широком смысле этого слова) или о связях между ними, заданные в виде знакосочетаний определенных типов (например, в виде слов в подходящем алфавите или в виде дискретных знаковых конструкций, допускающих 'индивидуальные задания' в виде слов в подходящем алфавите). В случае варьируемых исходных данных, имеющих этот характер, обычно ставится задача о построении алгорифма, перерабатывающего исходные данные в искомые решения.

Интуитивно ощущаемая *необязательность* 'далеко идущих' идеализаций КТМ при рассмотрении упомянутых выше задач направляла мысль на поиски таких вариантов различных математических теорий, в которых в качестве объектов изучения фигурируют лишь объекты, индивидуально задаваемые посредством *знаковых конструкций* подходящего типа. А последние – это 'почти физические' объекты, при теоретических рассмотрениях которых имеет смысл пытаться обходиться без использования 'далеко идущих' идеализаций.

Как чисто теоретические соображения, возникавшие при критическом анализа интуитивных оснований математики, так и только-что упомянутые стимулы, идущие непосредственно из приложений математики, создали предпосылки для возникновения и развития *конструктивного направления в математике* (*конструктивной математики*). (**Доп3**)

Конкретные теории, принадлежащие конструктивному направлению в математике, объединяет то, что объекты (всех типов), о которых идет речь в этих теориях, являются конструктивно определяемыми объектами. Однако существуют значительные (даже принципиальные) различия между некоторыми теориями в 'уровне требований' *к семантической отчетливости* (*к разъясненности смысла*) формулируемых суждений и определений.

1.4. Даже математические теории с конечными предметными областями (такие теории очевидным способом включаются в конструктивную математику) опираются при мысленных рассмотрениях 'очень обширных' конечных множеств на экстраполяции и идеализации, которые оказываются в непростых взаимоотношениях с результатами физики и космологии. Деятельность 'в мире экспериментальных данных' при макроскопическом уровне детализации и 'охвата' в пространстве-времени фрагментов этого 'мира' и чувственное восприятие разнообразных мысленно выделяемых 'фактически обозримых' *конечных* совокупностей, состоящих из *одновременно существующих* и практически неизменных во времени предметов, а также разнообразные операции над такими совокупностями, оставляющие практически неизменными элементы этих совокупностей, образуют базу для идеализированных экстраполяций 'по аналогии' на представления о любых (в том числе – и об 'очень обширных') конечных совокупностях.

При экстраполяциях фактически используется ряд представлений, радикально отличающихся от современных представлений физики и космологии (в частности представление об *одновременности* двух пространственно отдаленных друг от друга событий, фигурирующих в роли элементов рассматриваемого конечного множества, заимствуется у ньютоновой механики).

Ситуации, в которых оказывается познающий субъект в результате мысленного выделения (быть может, с использованием упомянутых идеализированных экстраполяций) конечного набора конечных предметных областей и конечного набора операционально охарактеризованных процедур (термин "процедура" здесь и в дальнейшем изложении используется в качестве общего названия предметных операций и предикатов), определенных при всех предусмотренных типами процедур исходных данных, мы будем называть *вполне финитарными ситуациями.* А теоретические модели, получающиеся в результате знакового моделирования вполне финитарных ситуаций, будем называть *вполне финитарными математическими теориями.*

В этих теориях обычно используется традиционный логико-предметный язык 1-й ступени, пропозициональные логические знаки $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ понимаются как обозначения соответствующих булевых функций, а каждая формула, содержащая кванторы (знаки $\forall$ и $\exists$), 'расшифровывается' в виде бескванторной формулы на основе следующих соглашений: любая формула вида $\forall xA$ (вида $\exists xA$), где x – предметная переменная и A – бескванторная формула, 'расшифровывается' в виде формулы $(A_1\&A_2\&\ldots\&A_k)$ [соответственно, в виде $(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k)$], где A_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ обозначает результат подстановки в A вместо переменной x индивидуальной константы, имеющей порядковый номер i в списке всех допустимых значений переменной x.

Во вполне финитарных теориях любую замкнутую формулу (любое суждение) можно воспринимать как зашифрованное описание определенного (вообще говоря, многошагового) процесса, определенного эксперимента, а именно, процесса, называемого в логической литературе процессом нахождения *логической валентности суждения.* Часто формулируемые в логической литературе рекурсивные определения логической валентности суждений 'намекают' на способ развертывания подразумеваемых процессов, но в то же время они 'затушевывают' возможное непосредственное описание. Непосредственно и в наглядной форме процедура описывается в виде процесса последовательного продвижения по дереву синтаксического разбора рассматриваемого суждения от 'листьев' дерева к его 'корню' с выполнением очередных базисных процедур. (Здесь предполагается, что предварительно рассматриваемое суждение 'расшифровано' в виде бескванторной формулы). В тех случаях,когда результатом такого процесса является стандартный 'сигнал узнавания' в виде пропозициональной константы "И" (в 'бытовом' варианте – в виде слова "да"), рассматриваемое суждение называется *истинным суждением.* Таким образом, для вполне финитарных теорий при 'не слишком обширных' предметных областях (таких, что имеются основания находиться в рамках макроскопического уровня рассмотрения всей 'картины') оказывается возможным сравнительно отчетливое уточнение 'бытовых' интуитивных представлений об истинных суждениях. [Shan 1998] (См. ниже "Приложение".)

1.5. Выходя за рамки вполне финитарных математических теорий, но оставаясь в рамках теорий, в которых в качестве объектов изучения фигурируют лишь конструктивно определяемые объекты и допускаются дополнительные, но 'сравнительно осторожные' экстраполяции и идеализации, мы переходим 'на этаж' теорий *финитарной математики*. 'Сравнительная осторожность' во всяком случае означает отказ от представлений о 'завершенной бесконечности' и использование лишь таких логико-математических языков, в которых суждения допускают разъяснения посредством 'сравнительно наглядной' экстраполяции семантических представлений, принимаемых во вполне финитарных математических теориях.

Д. Гильберт в [Hilb 1926] привлек внимание математиков к достоинствам такого построения элементарной арифметики и алгебры, при котором терминами "натуральное число", "целое число", "рациональное число", "полином с целыми коэффициентами" называются *знакосочетания* определенных типов, характеризуемые посредством правил порождения (а не какие-либо 'абстрактные сущности', подразумеваемые обычно при аксиоматических или теоретико-множественных построениях соответствующих областей математики).

В дальнейшем изложении термин "натуральное число" будет применяться в качестве общего названия слов 0, 0|, 0||, 0|||, ..., характеризуемых посредством 'естественных' порождающих правил (в качестве кратких обозначений этих слов будем использовать соответствующие числа позиционной десятичной числовой системы). Также посредством 'естественных' порождающих правил с использованием знаков 0, |, −, / определяются целые и рациональные числа (при этом для последних вводится специфичное для объектов этого рода отношение равенства, отличное от графического равенства, и все рассмотрения производятся 'на фоне' этого специфичного отношения). (**Доп4**)

Дальнейшими примерами *конструктивно определяемых объектов* (КОО), привлекавшими внимание Гильберта, являются формулы логических языков, выводы в логических исчислениях и т.п.

Л. Кронекер установил возможность такого определения понятия "алгебраическое число", которое характеризует алгебраические числа как КОО и не использует понятие вещественного числа в какой-либо форме. 'Более наглядное' определение предложено в [Corp 1946]. (**Доп5**)

Гильберт, выделив КОО в качестве специфических объектов изучения, 'очертил' (эскизно) специфический способ их рассмотрения, названный им *финитарной установкой* (*финитарной точкой зрения*). Истоки этой установки можно обнаружить в некоторых высказываниях Кронекера. Финитарная точка зрения предлагает рассматривать КОО как "наглядно представимые" объекты [Hilb 1926] с использованием идеализации, называемой абстракцией потенциальной бесконечности (потенциальной осуществимости), но без абстракции завершенной (актуальной) бесконечности. При этом "...используются прямые содержательные рассуждения, совершаемые в виде мысленных экспериментов над наглядно представимыми объектами и не зависящие от предположений аксиоматического характера". (**Доп6**)

Последняя формулировка имеет вид ограничения на допускаемые типы математических рассуждений – ограничения, с одной стороны, весьма 'жесткого', а с другой – 'расплывчатого'. Она имеет 'приблизительно ориентирующий' характер и неявно подразумевает ограничения на используемые языковые конструкции. Конкретные примеры, рассмотренные Гильбертом, и некоторые его формулировки дают возможность уточнить (не отклоняясь от главной идеи Гильберта) тип тех суждений, которые с точки зрения финитарной установки можно рассматривать как осмысленные. В теории натуральных чисел – это суждения вида

$$\mathrm{S}_0. \qquad \exists^+ y_1 \ldots \exists^+ y_m \forall x_1 \ldots \forall x_n \; R \qquad (m \geqslant 0, n \geqslant 0),$$

где $\exists^+$ – *конструктивный* квантор существования (квантор *потенциальной осуществимости*), разъясняемый словосочетанием "можно построить" (или "потенциально осуществимо"), R – алгорифмически проверяемое (разрешимое) $(m+n)$-местное условие и $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$ – переменные для натуральных чисел. За рамками теории натуральных чисел – это суждения, которые можно 'перевести' в суждения указанного вида посредством арифметизации, т.е. посредством 'эффективного кодирования' натуральными числами объектов всех типов, фигурирующих в рассматриваемой теории. (**Доп7**)

Суждения вида S_0 принадлежат столь 'узкому' типу суждений, фактически фигурирующих в математике (в частности, в математическом анализе), что на первый взгляд представляется совершенно бесперспективной надежда 'практически удовлетворительно' выразить на таком языке хотя бы 'наиболее работоспособные' (с точки зрения приложений математики) части МА.

Финитарная установка в [Hilb & Bern 1934] (а до этого – в [Hilb 1926]) была продемонстрирована сначала на примере элементарной арифметики, включающей в себя конструктивно определяемые примитивно рекурсивные функции (ПРФ), и элементарной алгебры, а в дальнейших частях монографии – и на материале языковых конструкций логических и логико-математических языков и выводов в логических и логико-математических исчислениях. Эта установка не предлагалась Гильбертом в качестве методологии, рекомендуемой для всей математики. Более того, упомянув об обнаруженной Л. Кронекером возможности построения в рамках финитарной установки основ теории алгебраических чисел, Гильберт и Бернайс утверждают,что в математическом анализе "...нефинитарные способы образования понятий и нефинитарные доказательства являются неотъемлемой частью методов теории".

Таким образом, Гильберт, предложив финитарную установку в качестве подходящей основы для исследования свойств логических и логико-математических исчислений (в первую очередь - непротиворечивости исчислений) и в качестве одного из методов построения сравнительно элементарных фрагментов математики, не рассчитывал на возможность построения финитарных вариантов 'достаточно богатых' математических теорий. Он подчеркивал доминирующую роль в математике аксиоматического метода, основывающегося (в своей логической части) на дедуктивном аппарате классической логики, который мотивируется интуитивными представлениями КТМ.

Однако при обсуждении проблемы 'финитизации' МА имеется в виду не тот или иной вариант 'пересказывания' определений и утверждений традиционного МА на языке, приемлемом в финитарной математике (такие попытки безнадежны!), а построение средствами такого языка системы понятий, *быть может, значительно отличающейся от традиционной,* но предоставляющей возможность развить *аппаратную часть* МА в объеме, 'практически достаточном' для ее традиционных приложений, и (желательно) в форме, предоставляющей дополнительные возможности (например, возможность отчетливо 'видеть' типы конструкций, участвующих в построении решения рассматриваемой задачи, и типы исходных данных для таких конструкций). При этом не исключается, что в качестве финитарных аналогов некоторых теорем классического МА будут фигурировать ‘финитарные усиления’ аналогов этих теорем в конструктивном МА, развивавшемся на протяжении XX столетия на основе ‘непосредственных’ конструктивных аналогов основных понятий классического МА и в рамках ‘более слабых’ требований к ‘семантической отчетливости’, чем в финитарной математике.(В этом ‘традиционном’ конструктивном МА используется язык, значительно более широкий, чем в финитарной математике).

При такой точке зрения на преследуемую цель можно констатировать,что мнение Гильберта и Бернайса о ‘нефинитизируемости’ математического анализа оказалось опровергнутым в ходе дальнейшего развития математики.

Основной целью этой статьи является изложение доводов в пользу этого тезиса.

§2. Частные теории натуральных чисел и арифметических алгорифмов как ‘среда моделирования’ финитарных теорий конструктивно определяемых объектов разнообразных типов

2.1. Обычно используемая в теории КОО техника кодирования натуральными числами всевозможных слов в заданном алфавите, слов специальных типов, характеризуемых порождающими системами, и КОО иных типов дает возможность ‘переводить’ рассмотрения многих вопросов, касающихся финитарной математики, на язык арифметики (теории натуральных чисел) и арифметических алгорифмов. В дальнейшем изложении эта возможность систематически используется.

Отметим, что термин “рекурсивная функция” применяется ниже как синоним термина “частичная рекурсивная функция”.

2.2. При финитарной установке проблема разъяснения математических суждений о КОО является *проблемой экстраполяции* на такие ‘почти физические’ объекты охарактеризованных выше (в разд. 1.4) представлений об истинных суждениях, формирующихся при вполне финитарных ситуациях. При попытке экстраполировать такую семантику на теорию натуральных чисел возникают принципиальные трудности, и в осознании характера этих трудностей весьма важную роль сыграла изобретенная Кантором шкала конструктивных ординалов.

Трудности принципиального характера обнаруживаются уже при рассмотрении арифметических суждений следующих двух видов S_1 и S_2:

S_1. *Рекурсивная n-местная арифметическая функция f тотальна.*

Символическая запись, поясняющая это суждение, имеет вид:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n ! f(x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь x_1, ... ,x_n – переменные для натуральных чисел, и запись $!f(x_1, \ldots, x_n)$ означает: "процесс вычисления значения $f(x_1, ..., x_n)$ заканчивается".

S_2. *Тотальная n-местная рекурсивная функция ϕ является 0-функцией.*

В символической записи:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0).$$

Обсуждение трудностей, которые здесь имеются в виду, можно найти (с краткой исторической справкой) в [Shan 1995, §1]. Здесь отметим лишь, что в результате анализа трудностей, имеющих принципиальный характер, приходится 'смириться' с невозможностью какого-либо 'полного и окончательного' уточнения представлений об 'убедительно мотивированных' экстраполяциях на суждения видов S_1 и S_2 того понятия истинного суждения, которым пользуются при вполне финитарных ситуациях. В этом смысле проблему формулирования 'точной' семантики для таких суждений можно охарактеризовать как 'тупиковую'.

Это побуждает избирать для упомянутых суждений (и для суждений, сводимых к ним посредством отчетливых семантических соглашений, в частности, для суждений вида S_0) *частные семантики,* и 'работать' с суждениями, истинными в избранной частной семантике.

2.3. Обычно используемый способ задания частных семантик основан на специализации понятия "истинное суждение" посредством задания двух порождающих систем (порождающих грамматик) Γ и Σ, обладающих перечисляемыми ниже свойствами.

1) Объекты, порождаемые системой Γ (назовем их Γ-функциями), представляют собой знакосочетания, задающие (в точно определяемом смысле) некоторые арифметические рекурсивные функции и составляемые (например) по образцу предложенных

Х. Карри в [Curry 1941] (см. также [Shan 1970, 1973 (§2)] для ПРФ языковых выражений из обозначений начальных функций и некоторых операторов (в случае символики Карри для ПРФ – из обозначений операторов регулярной подстановки и примитивной рекурсии). Фактически используемые системы этого рода обычно таковы, что множество порождаемых объектов разрешимо.

2) Предполагается, что предъявлено 'достаточно наглядное' ('содержательное' в смысле Гильберта) *обоснование тотальности* любой Г-функции. (Например, для обоснования тотальности любой конкретной ПРФ используется 'обычное', т.е. при стандартном упорядочении натуральных чисел, индуктивное рассуждение, и нет необходимости в использовании какой-либо более сложной формы индукции.)

3) Для задания 'естественных' в рамках данной символики 'составных' рекурсивных операторов (называемых ниже Г-операторами) вводятся в рассмотрение знакосочетания, получающиеся при использовании в процессах построения символических выражений, названных выше Г-функциями, переменных для Г-функций на равных правах с обозначениями начальных функций, с последующим связыванием λ-символом Черча всех функциональных переменных, входящих в порождаемые этим способом выражения.

4) Предполагается, что на основе порождающей системы Г введен в рассмотрение язык (называемый ниже Г-языком), формулы которого конструируются стандартным способом из натуральных чисел, переменных для натуральных чисел, Г-функций, переменных для Г-функций, Г-операторов, переменых для Г-операторов и знаков $=$, $\neg$, $\&$, $\vee^+$, $\forall$, $\exists^+$. Здесь $\vee^+$ – знак конструктивной (брауэровской) дизъюнкции и $\exists^+$ – конструктивный (брауэровский) квантор существования. 'Классическая' дизъюнкция $\vee$, 'классический' квантор существования $\exists$ и эквивалентность $\leftrightarrow$ вводятся в качестве символов для сокращенной записи формул определенного вида, а именно:

$$(P \vee Q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \neg(\neg P \& \neg Q), \qquad \exists x P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \neg \forall x \neg P,$$

$$(P \leftrightarrow Q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} ((P \to Q) \& (Q \to P)).$$

При этом *финитарно осмысленными* считаются замкнутые формулы вида

S* $$\exists^+ \zeta_1 \ldots \exists^+ \zeta_k \forall \xi_1 \ldots \forall \xi_l \Xi,$$

где $\zeta_1, \dots ,\zeta_k,\xi_1, \dots ,\xi_l$ – различные переменные, допустимыми значениями которых могут быть натуральные числа, Г-функции и Г-операторы, а Ξ – *бескванторная* формула. Финитарное обоснование формулы S^* слагается из предъявления (или описания метода построения) некоторых знакосочетаний $Z_1, \dots ,Z_k$, представляющих собой допустимые значения переменных $\zeta_1, \dots ,\zeta_k$ (соответственно), и 'финитарно приемлемого' обоснования тождественной истинности бескванторной формулы Ξ^+, получаемой из Ξ в результате подстановки в нее слов $Z_1, \dots ,Z_k$ вместо переменных $\zeta_1, \dots ,\zeta_k$ (соответственно).

5) Для выделения некоторых бескванторных формул, допускающих 'финитарно приемлемое' обоснование своей тождественной истинности, используется порождающая система Σ. Предполагается, что все объекты, порождаемые системой Σ (назовем их Σ-формулами), представляют собой *бескванторные* формулы Г-языка, и что предъявлено 'достаточно наглядное' *обоснование тождественной истинности* любой Σ-формулы (например, для обоснования тождественной истинности любой формулы языка примитивно рекурсивной арифметики, порождаемой стандартным аппаратом логического вывода этой арифметики, используется 'обычное' индуктивное рассуждение).

Специализация понятия "истиное суждение" посредством задания Г и Σ состоит в том, что именно формулы, представимые в виде замыкания квантором $\forall$ формул, порождаемых системой Σ, рассматриваются как "истинные" на основе 'достаточно мотивированной' экстраполяции в теорию натуральных чисел и арифметических алгорифмов представлений об истинных суждениях, используемых во вполне финитарных теориях.

Однако любая такая экстраполяция 'открыта для расширений'. Частные семантики можно 'выстраивать' в иерархии по 'трудности' и 'убедительности' упомянутых двух обоснований – в иерархии, в которых приемлемость 'ступеней' в качестве 'мотивированных экстраполяций' понятия истинного суждения, используемого при вполне финитарных ситуациях, становится все менее и менее 'убедительной' при удалении от начала иерархии.

2.4. В то же время, 'начальные ступени' некоторых иерархий оказываются 'достаточно мотивированными' и в то же время подходящими в качестве семантической базы для развития 'богатых по содержанию' теорий финитарной математики. С этой точки зрения привлекли к себе внимание примитивно рекурсивные функции (ПРФ), построенный на их основе *бескванторный* язык (использующий равенства примитивно рекурсивных термов в качестве атомарных формул и 'булевы комбинации' таких атомарных формул в качестве формул языка) и бескванторный аппарат логического вывода классической логики с правилом подстановки термов вместо переменных, дополненный бескванторным правилом 'обычной' арифметической индукции и постулатами, характеризующими отношение равенства, начальные примитивно рекурсивные функции и используемые операторы. Весь этот комплекс получил название "примитивно рекурсивная арифметика" (ПРА). Он в форме аксиоматической системы описан в [Hilb & Bern 1934] (основные черты ПРА в неформализованном виде можно найти в [Skol 1923]). Весьма интересные варианты ПРА предложены Р. Л. Гудстейном [Good 1945,1957] (см. также [Shan 1970]) и А. Черчем [Chu 1957].

При использовании какой-либо формулы языка ПРА в роли суждения подразумевается,что перед всей формулой 'незримо' располагаются кванторы общности, связывающие все входящие в формулу переменные. Традиционный язык ПРА очевидным способом 'достраивается' до языка, включающего в себя формулы вида S^* .

Приемлемость ПРА мотивируется приемлемыми с финитарной точки зрения рассуждениями, обосновывающими тотальность любой ПРФ и тождественную истинность любой формулы, выводимой средствами дедуктивного аппарата ПРА.

В связи с большим интересом, проявляемым в современной математике к вопросу о возможности решения тех или иных задач в рамках 'как можно более простых' (в том или ином смысле) конструктивных средств, значительное внимание привлекают некоторые субрекурсивные арифметики – частные финитарные арифметики, 'более узкие', чем ПРА (см., например, [Rose 1984]; см. также [Shan 1979]). Примером значительно разработанной теории этого типа может служить теория рекурсивных функций, элементарных в смысле Кальмара.

Имеет смысл говорить и об *аксиоматических теориях* частных финитарных арифметик: имеется в виду изучение 'в общей форме' пар порождающих систем Γ, Σ – пар, удовлетворяющих упомянутым выше и тем или иным дополнительным условиям. При фиксации дополнительных условий, налагаемых на такую пару, получается теория частных финитарных арифметик определенного типа.

В дальнейшем изложении мы не будем использовать аксиоматический подход, а будем иметь в виду в качестве типичного (во многих отношениях) примера частных финитарных арифметик конкретную теорию – примитивно рекурсивную арифметику.

§3. Подход Р. Л. Гудстейна к построению финитарных вариантов начальных разделов математического анализа

3.1. Центральное понятие традиционного МА - понятие функции вещественной переменной – 'привязано' к понятию вещественного числа и является частным случаем понятия отображения одного множества в другое. При поисках путей 'конструктивизации' и 'финитизации' МА внимание привлекали в первую очередь две проблемы: (a) как целесообразно определить аналоги двух упомянутых понятий и (b) неизбежно ли вообще введение аналога понятия вещественного числа в качестве базисного понятия (неизбежность введения *некоторых* вещественных чисел для *частных применений* несомненна).

Постановка второго вопроса вызвана тем, что в приложениях математики экспериментально интерпретируемыми математическими объектами часто оказываются *интервальные функции*, соответствующие тем или иным представлениям о 'приблизительно определенном' значении рассматриваемой функции при 'приблизительно определенном' значении исходного данного. По отношению к интервальным функциям используемые в МА 'точечно определенные' функции вещественной переменной в первую очередь играют роль инструмента, посредством которого 'приближенно заданному' (обычно в виде рационального промежутка) значению исходного данного ставится в соответствие (обычно в таком же виде) 'приближенно заданное' значение функции.

В частности, если f – непрерывная функция, а g – суммируемая (т.е. интегрируемая в смысле Лебега) функция, то подходящие интервальные функции Ω_1 и Ω_2 можно определить (например) так:

$$\Omega_1(f,[r,s],n) \stackrel{\text{def}}{=} [\langle \inf_{[r,s]} f\rangle^{n-}, \langle \sup_{[r,s]} f\rangle^{n+}],$$

$$\Omega_2(g,[r,s],n) \stackrel{\text{def}}{=} [\langle C\rangle^{n-}, \langle C\rangle^{n+}],$$

где r и s – рациональные числа, такие что $r < s$, n – натуральное число, выражения вида $\langle\, \alpha\, \rangle^{n-}$ и $\langle\, \alpha\, \rangle^{n+}$, где α – вещественное число, обозначают определяемые фиксированным способом рациональные приближения к α с точностью до 2^{-n} снизу и (соответственно) сверху, а C обозначает среднее интегральное значение функции g в промежутке $[\, r, s\,]$. (Введение переменной n для натуральных чисел кроме 'переменного промежутка' $[r, s]$ не является необходимым, но удобно с технической точки зрения.) В этой части статьи не предполагается, что функция f (число α) заданы алгорифмами, и поэтому, говоря о способах рационального приближения числа α, мы имеем в виду представления, связываемые с этим термином в классическом МА.

В случае непрерывных функций принципиальная возможность их замены интервальными функциями, удовлетворяющими определенным условиям, была замечена математиками интуиционистского направления в математике (см. [Heyt 1934]). Аналогичный подход получил развитие в теории рекурсивных функционалов и операций. Построение некоторых фрагментов теории дифференциальных и интегральных уравнений 'на языке' функций областей обогатило методы и содержание математической физики (см. [Gunt 1940]).

Однако несмотря на то, что мышление на языке функций областей представляется весьма естественным с точки зрения приложений математики, обычно используются такие аппараты (в частности, 'точечно определенные' функции вещественной переменной), которые лишь *косвенно* задают функции областей. Дело в том, что 'очевидное' определение операции дифференцирования интервальной функции приводит к 'точечно определенным' функциям (т.е. происходит выход за рамки функций областей). Кроме того, интервальные функции, соответствующие (например) функциям sin, ln и т.п., нетрудно задать формулами, но устанавливать даже простейшие свойства этих функций, основываясь на их интервальных заданиях, весьма затруднительно. Сказанное выше закрепило в сознании большинства математиков представление о базисной роли в МА традиционного понятия функции вещественной переменной и понятия вещественного числа.

3.2. Первый опыт 'конструктивизации' понятия вещественного числа предпринял Г. Вейль [Weyl 1918]. Он фиксирует определенный язык, позволяющий, в частности, задавать формулами со свободной переменной для рациональных чисел некоторые подмножества множества рациональных чисел. Формулы этого языка, задающие множества, обладающие свойствами верхних классов дедекиндовых сечений в множестве рациональных чисел, рассматриваются как "определимые" вещественные числа. Вейль развил (правда, средствами классической логики) теорию определимых чисел и определимых функций. В дальнейшем выяснилось, что эта теория ввиду ряда ее особенностей не в состоянии играть роль удовлетворительной базы для 'конструктивизации' МА. Уже сам Вейль подверг критике свою теорию, однако в центре его критики оказались не технические или логические аспекты теории, а следующее фундаментальное обстоятельство: "Это была действительно *атомистическая теория континуума,* логически выдержанная и вместе с тем насильственно вымученная. При помощи теоретико-познавательного анализа я старался выявить как можно более резко ту глубокую пропасть, которая отделяет наши математические построения от непосредственно переживаемой нами непрерывности" [Weyl 1926].

Фактически Вейль возобновляет здесь восходящую к мыслителям античной эпохи критику интуитивных представлений о 'составленности' прямолинейного отрезка из отдельных точек. Он принимает предложенные Брауэром представления о числовом континууме как о 'среде свободного становления последовательностей рациональных чисел'. Однако эти представления были расценены как 'достаточно понятные' лишь немногими математиками, и после появления в математике уточнения (и стандартизации) интуитивного понятия алгорифма в форме понятия "машина Тьюринга" и ряда эквивалентных ему понятий усилия математиков, стремившихся построить конструктивный вариант МА, в основном были направлены на развитие теории 'алгорифмически определяемых' (в нескольких смыслах) вещественных чисел и 'алгорифмически определяемых' на таких числах функций.

Однако высказанная Вейлем критика коренной особенности его теории полностью распространяется и на теории, имеющие дело с 'алгорифмически определяемыми' вещественными числами.

3.3. Принципиально новый подход к проблеме построению конструктивных (даже финитарных) вариантов некоторых начальных разделов МА предложил Р. Л. Гудстейн [Good 1945, 1961, 1956]. Он на роль базисных объектов МА выбирает не ‘точечно определенные’ функции вещественной переменной (как это делается в традиционном МА), а ‘аппроксимативно определяемые’ функции некоторых типов, рассматриваемые в качестве финитарных аналогов функций, непрерывных (или непрерывно дифференцируемых) на замкнутом рациональном промежутке. Эти аналоги примечательны тем, что их определения не предусматривают предварительного введения понятия вещественного числа в какой-либо форме. Основные идеи подхода Гудстейна ниже излагаются с некоторыми отклонениями технического и терминологического характера от текстов Гудстейна.

Прежде всего фиксируется способ использования ПРФ для задания некоторых функций, определенных на рациональных числах и имеющих рациональные значения (а также некоторых последовательностей таких функций). В качестве ‘изображений’ рациональных чисел в языке ПРА используются тройки натуральных чисел (тройка K, L, M ‘изображает’ рациональное число $K-L/M+1$) и на язык таких ‘изображений’ переводятся стандартные определения отношения равенства, порядковых отношений и основных операций. Допускается использование символов, играющих роль переменных для рациональных чисел: всякий такой символ рассматривается как обозначение некоторой тройки различных переменных для натуральных чисел. Допускается использование символов, играющих роль обозначений некоторых функций с рациональными значениями, определенных на кортежах натуральных чисел (и тем самым в некоторых случаях – на рациональных числах) с заданным количеством членов, и в каждом таком случае предполагается заданной некоторая тройка ПРФ, ‘разъясняющая’ используемое обозначение рациональнозначной функции. Если символ F разъяснен посредством тройки ПРФ F_1, F_2, F_3, то выражение вида $F(H)$ понимается как обозначение выражения $F_1(H)$, $F_2(H)$, $F_3(H)$. Допускается также использование символов, играющих роль переменных для функций с рациональными значениями. Если V – такой символ, то выражение $V(H)$ понимается как обозначение выражения $V_1(H)$, $V_2(H)$, $V_3(H)$, где V_1, V_2, V_3 – различные переменные для ПРФ с соответствующим количеством аргументных мест.

Тройка 3-местных ПРФ F_1,F_2, F_3 называется *рациональной 1-местной ПРФ,* если она равным рациональным числам ставит в соответствие также равные рациональные числа и формульная запись этого утверждения выводима в ПРА. Тройка 4-местных ПРФ G_1, G_2, G_3 называется *последовательностью рациональных 1-местных ПРФ,* если в ПРА выводима формульная запись следующего утверждения: любая тройка 3-местных ПРФ, получаемая из G_1, G_2, G_3 в результате фиксации значения первого аргумента, представляет собой рациональную 1-местную ПРФ.

Один из вариантов предложенного Гудстейном финитарного аналога понятия функции, равномерно непрерывной в замкнутом рациональном промежутке $[a, b]$, может быть введен в рассмотрение следующим определением (ниже буквы i, k, l, n – это переменные для натуральных чисел, а r, s – переменные для рациональных чисел):

Последовательность рациональных ПРФ G называется *рекурсивной равномерно непрерывной в* $[a, b]$ *функцией,* если можно построить ПРФ h, p и q такие, что при всех допустимых значениях переменных выполняются следующие условия:

$$(k \geqslant h(i) \ \& \ l \geqslant h(i)) \rightarrow (|G(k,r) - G(l,r)| < 2^{-i}),$$

$$(|r - s| < 2^{-p(i)} \ \& \ n \geqslant q(i)) \rightarrow (|G(n,r) - G(n,s)| < 2^{-i}).$$

Гудстейн подразумевает (однако не говорит об этом явно), что выполнение этих условий в конкретных случаях обосновывается выводами в ПРА.

На основе аналогичных подходов Гудстейн вводит в рассмотрение финитарные аналоги понятия равномерно непрерывно дифференцируемой в $[a, b]$ функции и понятия плоской кривой [Good 1956].

Предложенные Гудстейном финитарные аналоги ряда понятий традиционного МА определяются методом, ‘похожим’ на метод пополнения метрических пространств. Однако имеются и существенные отличия. В роли упомянутой выше последовательности рациональных ПРФ G может фигурировать последовательность, в которой рациональные ПРФ, получаемые при фиксации номера члена последовательности, имеют разрывы в множестве рациональных чисел (вообще говоря, эти функции лишь ‘становятся все менее и менее разрывными’ при возрастании номера члена последовательности). Таким образом, рациональные ПРФ, из которых ‘формируются’ последовательности, не составляют подпространство конструируемого пространства. Ниже в разд. 4.6

будет отмечена еще одна черта предложенной Гудстейном системы понятий, препятствующая 'непосредственному' вложению теорем, формулируемых на основе этой системы, в бескванторный язык ПРА.

В целом приходится констатировать, что подход Гудстейна в его исходном варианте недостаточно приспособлен для распространения его на многие функциональные пространства, играющие важные роли в современном МА. Он нуждается в модификациях, и такие модификации 'подсказывают' некоторые результаты развития теории функциональных пространств в классической математике.

Определенный шаг в этом направлении был сделан самим Гудстейном. Он построил алгорифм (допускающий оформление в виде рекурсивного оператора), строящий по любой последовательности рациональных ПРФ G и любой тройке ПРФ h, p, q, для которых выполняются указанные выше условия (характеризующие G как рекурсивную равномерно непрерывную в $[\,a, b\,]$ функцию), определенную рекурсивную равномерно непрерывную в $[\,a, b\,]$ функцию G^+, эквивалентную в 'естественном' смысле функции G и такую, что все члены последовательности G^+ представляют собой *полигональные* функции с рациональными 'координатами вершин'.

Гудстейн подчеркивает, что предлагаемые им финитарные аналоги некоторых понятий традиционного МА не предусматривают предварительного введения понятия вещественного числа в какой либо форме. В то же время, для рекурсивной равномерно непрерывной функции G, дополненной тройкой ПРФ h, p, q, естественным образом (посредством конструкции 'диагонального' типа) определяются ее значения на алгорифмически заданных вещественных числах (для таких определений удобно сначала перейти к G^+). Несмотря на такую возможность, введенные в рассмотрение Гудстейном функции – это (по существу) объекты особого типа, соответствующие следующему определению Л. Эйлера: “Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств”.

Роль исходного материала для такого определения могли сыграть, в частности, степенные ряды с рациональными коэффициентами, рассматриваемые как последовательности полиномов ‘на фоне’ определенных способов оперирования над наборами коэффициентов этих полиномов. С течением времени и от случая к случаю смысл термина “аналитическое выражение” изменялся (в соответствии с изменениями допускаемых средств конструирования символических выражений и способов интерпретации последних). В результате в математике встречается много различных форм функций в смысле Эйлера. Подходящие уточнения цитированной приблизительной характеризации функций в смысле Эйлера на основе некоторых модификаций и экстраполяций идей Гудстейна об аппроксимативно определяемых функциях, вместе с результатами развития теории функциональных пространств в традиционном МА, приводят к введению ряда таких понятий, которые предоставляют возможность развить обширную часть МА в рамках финитарной математики и продвинуться в реализации программы Л. Кронекера, ориентирующей на построение различных областей математики с использованием только ‘осторожных’ идеализаций.

§4. Финитарные пополнения элементарных метрических и счетнометрических пространств как финитарные аналоги функциональных пространств классической математики

4.1. Ключевые роли в достижении цели, о которой выше шла речь, играют введенные в первой половине XX столетия понятия метрического пространства, счетнометрического пространства и пополнения метрического (счетнометрического) пространства. Понятие пополнения метрического пространства ведет свое происхождение от предложенного Г.Кантором и (независимо) Ш. Мерэ определения понятия “вещественное число”. Последнее основано на определенной конструкции.

Здесь термин “конструкция” применен не в том смысле, в каком он используется в конструктивной математике, а в более широком смысле. Определение, о котором сейчас идет речь, апеллирует к ‘почти физическим’ представлениям о последовательностях рациональных чисел как о процессах последовательного построения некоторых объектов, и с этой точки зрения оно ‘интуитивно конструктивное’. ‘Алгорифмизация’ этой конструкции, дополненная подходящими модификациями и обобщениями, открыла путь к построению конструктивных и, более того, финитарных вариантов ряда областей МА. (**Доп8**)

Предложенное Кантором и Мерэ определение вещественных чисел как фундаментальных последовательностей рациональных чисел (рассматриваемых 'на фоне' некоторого естественного отношения равенства таких последовательностей) конкурировало с определениями, предложенными К. Вейерштрассом и Р. Дедекиндом. Однако именно определение Кантора и Мерэ 'поддалось' весьма плодотворному обобщению в виде предложенного Ф. Хаусдорфом понятия фундаментальной последовательности точек заданного метрического пространства. Удобный 'для конструктивизации' вариант этого понятия имеет следующий вид:

Пусть $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ – метрическое пространство (с носителем $\mathbf{M}$ и метрической функцией ρ) и F – отображение множества всех натуральных чисел $\mathbf{N}$ в $\mathbf{M}$. Говорят, что F является *фундаментальной последовательностью точек* этого пространства, если существует функция h, отображающая $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$ и являющаяся *регулятором сходимости в себе* последовательности точек F, то есть такая, что для любых натуральных чисел i, k, l выполняется условие:

$$(k \geqslant h(i) \ \& \ l \geqslant h(i)) \rightarrow (\rho(F(k), F(l)) < 2^{-i}). \qquad (*)$$

Если 'предъявлена' в виде алгорифма фундаментальная последовательность F, но не сообщен какой-либо ее регулятор сходимости в себе, то даже в тех случаях, когда 'утаиваемая' функция h представляет собой алгорифм, оказывается 'творческой' (например) проблема нахождения какого–либо натурального числа n, для которого при любом k расстояние от $F(0)$ до $F(k)$ меньше, чем n. Такая недостаточность информации, содержащейся в самой фундаментальной последовательности F (ощущаемая особенно 'остро' в системе понятий конструктивной математики) побуждает предпочитать пополнениям метрических пространств, состоящим из фундаментальных последовательностей точек, пополнения, состоящие из *дуплексов,* т.е. из пар вида $\langle F, h \rangle$, удовлетворяющих при любых i, k, l условию $(*)$.

Аналог такого пополнения в системе понятий конструктивного математического анализа получается в результате ограничения "поля зрения" конструктивными метрическими пространствами, алгорифмически заданными последовательностями точек и такими же регуляторами сходимости в себе (см., например, [Shan 1962, 1968 §10], [Tsey 1962a]). В частности, если $\mathbf{M}$ – множество рациональных чисел и $\rho(r,s) = |r-s|$, то дуплекс $\langle F, h \rangle$ называется *вещественным дуплексом.* Его естественно рассматривать как 'информационно полноценный' конструктивный аналог понятия вещественного числа в смысле Кантора и Мерэ.

Однако критика интуитивной базы теории множеств, о которой шла речь в §1, распространима в некоторой своей существенной части и на интуитивную базу традиционного ('широкого') конструктивного математического анализа – в последнем формулируются суждения, значительно выходящие за рамки языка финитарной математики и, следовательно, представляющие собой трудные 'семантические загадки'. В частности, одно из центральных понятий – понятие конструктивной функции на конструктивном континууме (см. [Mark 1958,1962]) – характеризуется условием, приводимым логическими средствами 'широкой' конструктивной математики к виду

$$\forall x \neg \forall y \neg \forall z (\Theta(c,x,y,z) = 0),$$

где Θ – некоторая примитивно рекурсивная функция, c – арифметический код рассматриваемой конструктивной функции и x, y, z – переменные для натуральных чисел. Здесь записан арифметический вариант условия, получающийся в результате подходящего кодирования натуральными числами конструктивных объектов различных типов, фигурирующих в определении понятия.

4.2. Выбор базисных понятий, подходящих для построения финитарных вариантов ряда областей МА подготовили (в первую очередь) конкретные теоремы из различных разделов МА, имеющие следующий вид:

В метрическом пространстве $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ существует счетное всюду плотное подмножество.

Теоремы этого вида обычно рассматриваются как констатации весьма существенного свойства рассматриваемого пространства, предоставляющего возможность (если $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ – полное пространство) ввести в рассмотрение 'изометричный двойник' данного пространства, получаемый как результат пополнения некоторого счетного метрического пространства. Однако в традиционном МА 'не принято' использовать процедуру пополнения в качестве систематически применяемого средства *определения* математических объектов 'сложных' типов (в частности, 'сложных' элементов функциональных пространств) на основе объектов простых типов. Но именно такой подход открывает путь к преодолению наложенного Гильбертом ‘табу’ на создание финитарных вариантов различных областей МА.

Традиционные доказательства конкретных теорем о существовании в метрических пространствах счетных всюду плотных подмножеств во многих случаях представляют собой доказательства (или легко превращаются в доказательства) *некоторых детализаций* рассматриваемых теорем – детализаций, констатирующих ряд принципиальных особенностей ‘предъявляемых’ в доказательствах счетных всюду плотных подмножеств и имеющих следующий вид:

В метрическом пространстве $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ существует всюду плотное подмножество $\mathbf{T}$ такое, что (1) его элементы имеют индивидуальные задания в виде конструктивно определяемых объектов некоторого конкретного типа (эти объекты назовем объектами типа τ), причем каждый объект типа τ ‘задает’ некоторый элемент множества $\mathbf{T}$, (2) объекты типа τ образуют разрешимое и, следовательно, перечислимое множество (можно считать, по существу не ограничивая общности, что объекты типа τ являются словами в подходящем алфавите и что речь идет о разрешимости множества объектов типа τ как подмножества множества всевозможных слов в этом алфавите), (3) на множестве $\mathbf{T}$, рассматриваемом как множество объектов типа τ, метрическая функция ρ задается в виде некоторого алгорифма и (4) если X и Y – объекты типа τ, то $\rho(X, Y)$ представляет собой *рациональное* (второй вариант – *алгебраическое*) число.

Любая конкретная теорема этого вида ‘подсказывает’ специфическую точку зрения на рассматриваемое метрическое пространство: элементы пространства $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ – это ‘почти конструктивно определяемые объекты типа τ’.

4.3. Некоторые функциональные пространства, изучаемые в МА, оказываются (при их естественных определениях) счетнометрическими, т.е. в паре $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ в роли ρ фигурирует функция, определенная на множестве $\mathbf{N} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ (или на множестве $\mathbf{N}^k \times \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ при $k > 1$), где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, и такая, что при всех конкретных значениях числового аргумента (или числовых аргументов) функции ρ ‘ведет себя’ как полуметрическая функция в множестве $\mathbf{M}$. Функция ρ называется мультиметрческой функцией в $\mathbf{M}$. Сказанное выше о теоремах, касающихся всюду плотных подмножеств некоторых метрических пространств, можно повторить и применительно к счетнометрическим пространствам.

В теории равномерных пространств имеется теорема, утверждающая, что любое счетнометрическое пространство равномерно эквивалентно некоторому метрическому пространству. Благодаря этой теореме в классической математике фактически не уделяется внимание счетнометрическим пространствам (исключение составляют счетнонормированные пространства). Однако при определениях финитарных аналогов функциональных пространств замена некоторых счетнометрических пространств метрическими пространствами 'по рецепту' упомянутой теоремы непродуктивна, так как может оказаться, что метрическая функция, заменяющая семейство полуметрик, на некоторых объектах типа τ принимает значения, не являющиеся алгебраическими числами. С другой стороны, по аналогичным соображениям оказывается продуктивным 'превращение' в счетнометрические пространства некоторых функциональных пространств, оказывающихся метрическими при их естественных для классического МА определениях. (Последнее практически всегда приходится делать в тех случаях, когда по крайней мере один конец промежутка, играющего роль области определения функций рассматриваемого типа, не является рациональным или алгебраическим числом.)

4.4. Рассмотрим в качестве примеров некоторые функциональные пространства классического МА. В каждом примере буквы a и b обозначают рациональные числа, $a \leqslant b$, ρ обозначает метрическую или мультиметрическую функцию в $\mathbf{M}$, буквы f и g символизируют произвольные точки рассматриваемого функционального пространства, а τ – название типа элементов выделенного всюду плотного подмножества функционального пространства.

- *Пространство равномерно непрерывных в* $[\,a, b\,]$ *функций.*

$$\rho(f, g) = \sup_{[\,a,b\,]} |f - g|,$$

объект типа τ – это полигональная функция с рациональными 'вершинами', заданная в виде конечной последовательности пар рациональных чисел (второй вариант: объект типа τ – это полином с рациональными коэффициентами).

• *Пространство функций, непрерывных в полуоткрытом промежутке* $[\,0,\pi\,)$.

Будем предполагать, что иррациональное число π задано (например) в виде примитивно рекурсивной последовательности рациональных чисел γ такой, что при всех k и l выполняются следующие условия: $\gamma(k) \leqslant \gamma(k+l)$, $\gamma(k+l) - \gamma(k) < 2^{-k}$.

$$\rho(k,f,g) = \sup_{[\,0,\gamma(k)\,)} |f-g|,$$

τ имеет такой же смысл как в предыдущем примере.

Рассматриваемая здесь мультиметрическая функция ρ может быть использована (специальным способом) и для определения пространства функций, равномерно непрерывных в замкнутом промежутке $[\,0,\pi\,]$. О способе использования функции ρ для этой цели речь будут идти ниже в разделе 4.6.

• *Пространство m-кратно равномерно дифференцируемых в $[\,a,b\,]$ функций.*

$$\rho(f,g) = \max_{0\leqslant n\leqslant m}(\sup_{[\,a,b\,]}|D^n(f) - D^n(g)|),$$

объект типа τ – это полином с рациональными коэффициентами.

Если f – элемент типа τ, то $D^n(f)$ понимается как *формальная* n-ая производная функции f.

• В результате замены в последнем равенстве выражения sup знаком $\int$ получается метрическая функция в *пространстве функций, имеющих m обобщенных производных в смысле С. Л. Соболева в* $[\,a,b\,]$.

• *Пространство бесконечно дифференцируемых в* $(-\infty,+\infty)$ *функций.*

$$\rho(k,m,f,g) = \max_{0\leqslant n\leqslant m}(\sup_{[\,-k,k\,]}|D^n(f) - D^n(g)|),$$

объект типа τ – это полином с рациональными коэффициентами.

• *Пространство абсолютно непрерывных в* $[\,a,b\,]$ *функций.*

$$\rho(f,g) = \operatorname*{Var}_{[\,a,b\,]}(|f-g|) + |(f-g)(a)|,$$

τ имеет такой же смысл как в первом примере.

• *Пространство функций суммируемых в* $[a, b]$ *с* n*-ой степенью* (n *– положительное целое число*).

$$\rho(f, g) = \Big(\int\limits_{[a,b]} |f - g|^n\Big)^{1/n},$$

объект типа τ – это ступенчатая функция с конечным набором рациональных ‘ступеней’, заданная в виде конечной последовательности пар рациональных чисел (второй вариант: объект типа τ – это полином с рациональными коэффициентами).

• *Пространство измеримых (в смысле Лебега) на* $[a, b]$ *функций.*

$$\rho(f, g) = \int\limits_{[a,b]} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|},$$

τ имеет такой же смысл как в предыдущем примере. Второй вариант: $\rho(f, g)$ равно среднему метрическому значению функции $|f - g|$ на $[a, b]$.

При переходе от пространств функций, определенных на числовом континууме или его частях, к пространствам функций, определенных на многомерных числовых пространствах или их частях, обычно оказывается естественным использование подходящих мультиметрик (способами, ‘похожими’ на использованные во втором или в пятом примерах). Предварительно вводятся в рассмотрение аппроксимативно определяемые аналоги линий и областей ряда типов, фигурирующих в соответствующих разделах традиционного МА.(Возникающие при этом проблемы обычно имеют не принципиальный, а технический характер.) Первый шаг в этом направлении был сделан в [Good 1956]. См. также [Dants 1976] – в этой работе рассматривается конструктивный (по существу – финитарный) аналог понятия аналитической функции.

4.5. Рассмотрим еще некоторые метрические пространства, к которым применимо сказанное выше в разд. 4.2.

• *Пространство измеримых (в смысле Лебега) подмножеств числового континуума, имеющих конечную меру.*

$$\rho(P, Q) = \mathrm{mes}((P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)).$$

Здесь P и Q – произвольные измеримые множества конечной меры, объект типа τ – это объединение конечного набора открытых промежутков с рациональными концами и рациональных точек, заданное конечной последовательностью пар рациональных чисел и отдельных рациональных чисел. (**Доп9**)

Важную роль в функциональном анализе играют компактные метрические пространства, определение которых, подходящее для 'конструктивизации', имеет вид: *компактное метрическое пространство* – это вполне ограниченное (т.е. обладающее ε-сетью при любом положительном рациональном числе ε) и полное пространство. Если для метрического пространства $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ и объектов типа τ выполнены все условия, перечисленные выше в разд. 4.2, то оказывается полезным следующий подход к определению финитарных аналогов *вполне ограниченных* подпространств данного пространства.

Если P и Q – конечные множества, состоящие из объектов типа τ, то мы полагаем:

$$\rho^*(P,Q) = \text{"расстояние между множествами } P \text{ и } Q \text{ в смысле Хаусдорфа"}$$

(это расстояние является алгебраическим числом). Элементы финитарного пополнения (см. ниже) пространства, образованного конечными множествами объектов типа τ при измерении расстояний между множествами метрической функцией ρ^*, являются естественными финитарными аналогами вполне ограниченных пространств классического МА. На таких финитарных аналогах очевидным образом определяются 'в духе Гудстейна' равномерно непрерывные функции.

Ключевым разделом функционального анализа в классической математике является теория функционалов и операторов некоторых типов. Во многих случаях исходные определения понятий имели характер, весьма далекий от представлений финитарной математики. Однако в процессе развития функционального анализа в ряде принципиальных случаев было установлено, что операторы, о которых идет речь, допускают аппроксимации в 'достаточно интересном' смысле посредством 'финитарно описываемых' операторов этого же типа. В этих случаях появляется возможность воспользоваться определениями аппроксимационного типа и в соответствующих разделах теории операторов. Здесь рассмотрим только один пример этого рода.

В классическом МА оператор называется *вполне непрерывным,* если он непрерывен и образ каждого ограниченного множества имеет компактное замыкание. В то же время, одна из теорем теории операторов утверждает, что в пространстве вполне непрерывных операторов, определенных (например) на пространстве суммируемых с квадратом в замкнутом промежутке $[a, b]$ функций, конечномерные операторы, описываемые посредством конечных квадратных матриц произвольного размера с рациональными элементами, образуют всюду плотное подмножество (расстоянием между двумя операторами считается норма их разности).

4.6. Любая конкретная теорема о всюду плотном подмножестве метрического (счетнометрического) пространства, имеющая описанный в разд. 4.2 вид, является ориентиром при определении финитарного аналога рассматриваемого пространства. Здесь имеется в виду определение, основанное на идее пополнения подходящего ‘элементарного’ метрического (счетнометрического) пространства, состоящего из КОО некоторого типа τ и удовлетворяющего условиям (1)–(4). Разумеется, объекты, присоединяемые к исходному ‘элементарному’ пространству, получают определения в рамках финитарной математики, и создаваемый этим способом финитарный аналог того или иного метрического пространства $\langle \mathbf{M}, \rho \rangle$ из арсенала традиционного МА способен ‘существовать самостоятельно’ без апеллирования даже к идее того определения, посредством которого изначально характеризовались элементы множества $\mathbf{M}$ (например, в случае пространства интегрируемых по Лебегу в промежутке $[a, b]$ функций – к идее “заданной на всех вещественных числах из промежутка $[a, b]$ и измеримой по Лебегу функции”).

Конструктивному направлению в математике принадлежат как математические теории финитарного типа (характерные весьма ‘жесткими’ требованиями к ‘разъясненности’ формулируемых суждений и определений), так и теории, принадлежащие ‘широкому’ конструктивизму. В последних фигурируют не только суждения, получающие разъяснение на уровне требований финитарной установки, но и суждения о КОО со сложными сочетаниями кванторов и пропозициональных логических связок, вызывающие семантические проблемы (при этом, вообще говоря, суждения видов S_1 и S_2 из разд. 2.2 воспринимаются как 'непосредственно понятные'). Теории финитарного типа являются и теориями второго типа, так как у 'широкого' конструктивизма нет претензий 'опровергающего' характера к теориям финитарного направления. В том варианте математического анализа, который разрабатывался в рамках 'широкого' конструктивизма (см. [Mark 1958, 1962; Shan 1962, 1968; Tsey 1962a,1962b; Zasl 1962]), объектами,присоединяемыми к 'элементарному' метрическому пространству при его конструктивном пополнении, являются дуплексы вида $\langle F, h \rangle$, где F и h – алгорифмы, тотальные в 'непосредственно понятном' смысле и удовлетворяющие 'непосредственно понятному' условию $(*)$. В некоторых случаях присоединяются только дуплексы, удовлетворяющие и некоторому дополнительному условию (см. [Dants 1976]).

При пополнении счетнометрического пространства в случае, когда ρ 'зависит' (например) от одного числового параметра, в роли F и h, образующих совместно некоторый элемент пополнения, фигурируют тотальные алгорифмы, функция h определена на парах натуральных чисел, и предполагается, что при всех натуральных числах m, i, k, l выполняется условие:

$$(k \geqslant h(m,i) \ \& \ l \geqslant h(m,i)) \rightarrow (\rho(m, F(k), F(l)) < 2^{-i}). \qquad (**)$$

Пусть W – тотальный алгорифм, ставящий в соответствие каждой паре натуральных чисел некоторый элемент пополняемого пространства, и H – тотальный 3-местный арифметический алгорифм. Пара $\langle W, H \rangle$ называется последовательностью точек пополнения, если при всех n, m, i, k, l:

$$(k \geqslant H(n,m,i) \ \& \ l \geqslant H(n,m,i)) \rightarrow (\rho(m, W(n,k), W(n,l)) < 2^{-i}). \qquad (***)$$

Для таких последовательностей очевидным способом вводится понятие регулятора сходимости в себе, и тройки вида $\langle W, H, R \rangle$ такие, что R является регулятором сходимости в себе для $\langle W, H \rangle$, называются фундаментальными последовательностями точек пополнения рассматриваемого 'элементарного' счетнометрического пространства. Наконец, в операторной форме формулируется и доказывается *теорема о полноте пополнения*: строится оператор Lim, ставящий в соответствие каждой тройке указанного вида некоторый элемент пополнения, являющийся в естественном смысле пределом рассматриваемой фундаментальной последовательности.

Включение 'в состав' вводимых в рассмотрение объектов аппроксимативного характера регуляторов сходимости в себе и регуляторов иных типов дает возможность в конструктивном МА и в финитарном МА строить теории соответствующих объектов в *операторном* варианте. Последний в определенных отношениях значительно предпочтительнее *предикатного* варианта. Ряд преимуществ демонстрирует, в частности, операторное изложение некоторых разделов конструктивного МА в [Shan 1962, 1968]. О 'взаимоотношениях' между двумя упомянутыми вариантами см. [Mints 1964, 1967]. Гудстейн строит свой вариант МА в предикатной форме, следуя в этом отношении преобладающему в классической математике способу изложения. Он не включает фигурирующие в его определениях регуляторы (различного рода) 'в состав' определяемых объектов, и это обстоятельство не позволило ему реализовать свой подход к МА *непосредственно* в рамках ПРА.

В связи со сказанным выше рассмотрим пространство функций, равномерно непрерывных в замкнутом промежутке $[0,\pi]$. В разделе 4.4 было отмечено, что пространство функций, непрерывных в полуоткрытом промежутке $[0,\pi)$, можно рассматривать как результат пополнения 'элементарного' пространства, состоящего из объектов типа τ (в даннос случае – из полигональных функций с рациональными 'вершинами', заданных в виде конечных последовательностей пар рациональных чисел, или из полиномов с рациональными коэффициентами) посредством конкретной мультиметрической функции ρ.При переходе к конструктивной математике имеется в виду конструктивное пополнение охарактеризованного выше типа.

Для определения в этом же 'стиле' пространства конструктивных функций, равномерно непрерывных в $[0,\pi]$, достаточно среди элементов такого пополнения выделить элементы, обладающие регулятором равностепенной непрерывности. Будем говорить, что арифметический алгорифм q является *регулятором равностепенной непрерывности* дуплекса $\langle F,h\rangle$, являющегося элементом упомянутого пополнения, если при всех i и k и при всех рациональных числах r и s выполняется условие

$$(0\leqslant r<s\leqslant\gamma(k)\ \&\ s-r<2^{-q(i)})\to(|\{F(k)\}(r)-\{F(k)\}(s)|<2^{-i}).$$

Здесь $\{F(k)\}(r)$ обозначает значение в точкае r той рационально-значной функции рационального аргумента, которая однозначно определяется объектом $F(k)$ типа τ.

Чтобы объекты, рассматриваемые в качестве конструктивных аналогов равномерно непрерывных в $[0, \pi]$ функций, обладали ‘достаточно полной’ информацией, целесообразно такими объектами считать тройки $\langle F, h, q\rangle$ такие, что выполняется условие $(**)$ и q является регулятором равностепенной непрерывности дуплекса $\langle F, h\rangle$.

Аналогично определяются (с использованием ‘регуляторов’ подходящих типов) применительно к замкнутому промежутку $[0, \pi]$ конструктивные аналоги функциональных пространств, определения которых применительно к замнутому промежутку $[a, b]$ с рациональными концами приведены выше в разделе 4.4.

Переход от описанного варианта пополнения ‘элементарного’ пространства к *финитарному* пополнению предусматривает предварительную конкретизацию некоторой частной финитарной математики, принимаемой в качестве базы для построения конкретных математических теорий. Об этом шаге речь шла в §2. По соображениям технического характера целесообразно КОО различных типов, фигурирующие в интересующей нас теории, кодировать натуральными числами, и в качестве алгорифмов стандартного типа использовать арифметические рекурсивные функции. При таком подходе удобной (и ‘практически достаточной’ в весьма широком диапазоне случаев) частной финитарной арифметикой оказывается ПРА, и в дальнейшем изложении мы будем предполагать, что именно ПРА выбрана (в качестве примера) на эту роль.

При *финитарном пополнении* ‘элементарного’ метрического (счетнометрического) пространства приходится использовать арифметические коды. Мы будем предполагать, что фиксированы некоторые способы кодирования натуральными числами объектов типа τ, рациональных и алгебраических чисел, и на этой основе фиксирован метод ‘перевода’ на язык ПРА алгорифмов, понятий и отношений, оказыающихся ‘в поле зрения’ в связи с формулами видов $(*)$ и $(**)$. Используя этот метод, мы можем по любой формуле Δ естественным способом построить ее *арифметический вариант* $\langle\Delta\rangle^{\mathrm{ar}}$.

При финитарном пополнеиии присоединяемыми объектами являются дуплексы вида $\langle F^*, h \rangle$ такие, что F^* и h – ПРФ, каждое значение функции F^* представляет собой код некоторого объекта типа τ (алгорифм, строящий сам этот объект, обозначен здесь посредством F) и в ПРА выводима формула $\langle D \rangle^{\mathrm{ar}}$, где D обозначает формулу $(*)$ (соответственно, формулу $(**)$). Множество дуплексов этого вида перечислимо. Если же мы присоединим к дуплексу $\langle F^*, h \rangle$ арифметический код $\langle \Pi \rangle^{\mathrm{cod}}$ некоторого вывода Π формулы $\langle D \rangle^{\mathrm{ar}}$ в ПРА, то получим триплекс $\langle F^*, h, \langle \Pi \rangle^{\mathrm{cod}} \rangle$ – объект, содержащий 'более богатую' информацию, чем $\langle F^*, h \rangle$. Такие триплексы образуют разрешимое подмножество множества всевозможных слов в алфавите используемого языка.

Подобным же образом модифицируются понятия последовательности точек пополнения и фундаментальной последовательности точек пополнения. Наконец, в операторной форме формулируется и доказывается *теорема о финитарной полноте финитарного пополнения.*

4.7. Некоторые заслуживающие внимания по своему 'интуитивному содержанию' понятия и теоремы классического МА не получают выражения в рамках очерченной выше системы понятий. Однако ситуация меняется после введения в рассмотрение 'квазифундаментальных' последовательностей точек метрического пространства. Их идея восходит к одному замеченному в [Bish 1967; p.109] свойству монотонных и ограниченных последовательностей рациональных чисел. Эта идея разрабатывалась в [Lif 1971], она послужила основой *теории заполнений* конструктивных метрических пространств и теории конструктивных функций на заполнениях. В [Lif 1971] все рассмотрения проводятся в рамках 'широкого' конструктивного МА. Упомянутый выше в разд. 4.5 финитарный аналог понятия вполне ограниченного пространства и сказанное в разд. 4.6 о финитарных пополнениях образуют подходящую основу для финитарного варианта теории заполнений.

Все сказанное выше касалось финитарных аналогов метрических и счетнометрических пространств, обладающих перечислимыми (счетными в конструктивном смысле) всюду плотными подмножествами. Пространство обобщенных функций в смысле Соболева–Шварца представляет собой пример топологического пространства, не обладающего таким подмножеством. Однако для этого пространства уже в рамках теоретико-множественной математики базисная идея Кантора и Мерэ наметила путь к созданию варианта, обладающего значительно большей ‘наглядностью’, чем исходные варианты. В работах [Mi & Si 1957, 1961; Korev 1955] эта идея была подвергнута некоторым изменениям, позволившим приспособить ее к принципиально новой ситуации и получить аппроксимационный вариант понятия обобщенной функции. В [PDD 1967, 1970] этот вариант адаптируется к системе понятий ‘широкого’ конструктивного МА, а в [Shan 1988] делается переход к финитарному аналогу понятия обобщенной функции, в котором исходный ‘строительный материал’ – это полиномы с рациональными коэффициентами.

4.8. В комбинаторной (алгебраической) топологии уже давно (фактически начиная с основополагающей работы П. С. Александров о проекционных симплициальных спектрах [Alex 1929]) весьма плодотворно ‘работает’ система понятий (в первую очередь – понятия прямого спектра и обратного спектра), специально ориентированная на использование аппроксимаций (обычно – не в метрическом смысле, а в иных смыслах) разнообразных объектов топологии ‘просто устроенными’ (обычно – допускающими финитарные задания) объектами. Для формулирования финитарных вариантов теорий, разработанных в рамках такого рода понятий, обычно достаточны ‘минимальные усилия’, состоящие в основном в замене понятия отображения (в частности, понятия последовательности объектов) в смысле КТМ понятием алгорифма того или иного подходящего типа.

4.9. Возвращаясь к содержанию раздела 3.1, рассмотрим вопрос об использовании аппроксимативно определяемых функций некоторых типов в качестве инструментов косвенного задания интервальных функций. В финитарном варианте математического анализа интервальные функции сначала определяются для элементов того ‘элементарного’ пространства, при финитарном пополнении которого получается интересующее нас функциональное пространство. Например, если в роли ‘элементарных’ объектов выбраны полигональные функции с рациональными ‘координатами вершин’ (или полиномы с рациональными коэффициентами) и они рассматриваются как основа финитарного пространства равномерно непрерывных в промежутке $[a, b]$ функций, а f – такой ‘элементарный’ объект, то $\Omega_1(f, [r, s], n)$ (см. разд. 3.1) представляет собой алгорифмически заданный рациональный промежуток. Если же в упомянутой роли фигурируют ступенчатаые функции с конечным набором рациональных ‘ступеней’ в $[a, b]$ (или полиномы с рациональными коэффициентами) и они рассматриваются как основа финитарного пространства суммируемых в $[a, b]$ функций, а g – ‘элементарный’ объект этого рода, то сказанное выше верно и для $\Omega_2(g, [r, s], n)$. (**Доп10**)

Экстраполяция интервальной функции Ω_1 на элементы финитарного пополнения (обозначим ее посредством $\Omega_1^\wedge$) производится ‘диагональным’ методом. Если $\langle F, h \rangle$ – дуплекс, являющийся элементом финитарного пополнения, то

$$\Omega_1^\wedge(\langle F, h \rangle, [r, s], n) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_1(F(h(n)), [r, s], n).$$

Нетрудно дать оценку ‘меры отклонения’ друг от друга получающихся рациональных промежутков в зависимости от n и от ‘близости’ r и s. Дословно так же определяется экстраполяция $\Omega_2^\wedge$ интервальной функции Ω_2 на элементы второго пополнения, и сказанное выше об оценке, касающейся $\Omega_1^\wedge$, можно повторит и применительно к $\Omega_2^\wedge$.

Задание интервальных функций описанным выше способом на основе аппроксимативно определяемых функций является косвенным заданием. Однако его существенная особенность состоит в том, что оно не апеллирует к понятию вещественного числа в какой-либо форме.

§5. О теоремах финитарной математики, имеющих форму мажорант теорем ‘широкой’ конструктивной математики

5.1. Теоремы ‘широкой’ конструктивной математики формулируются на языке, более ‘богатом’, чем язык финитарной математики. Например, суждение вида

$$\forall x(\forall y(\varphi(x, y) = 0) \rightarrow \forall z(\psi(x, z) = 0)), \qquad (****)$$

где φ и ψ – какие-либо ПРФ, а x, y, z – переменные для натуральных чисел, находится за рамками языка финитарной математики. Пониманию в этой формуле знака “$\rightarrow$” как обозначения булевой функции препятствует сказанное в разд. 2.2 о суждениях вида S_2.

Вопрос о семантике суждений, формулируемых на языке ‘широкой’ конструктивной математики, имеет длительную историю. Краткий очерк этой истории можно найти в [Shan 1981]. Один из подходов, предложенный в [Shan 1973] (и кратко изложенный в [Shan 1981]), подсказан многочисленными и разнообразными примерами теорем из 'широкой' конструктивной математики, для которых удавалось находить финитарно доказуемые мажоранты (т.е.'усиления' с точки зрения дедуктивного аппарата 'широкой' конструктивной математики), имеющие вид S^* (разд. 2.3) или приводимые к такому виду посредством арифметизации. Примеры такого рода привели к формированию иерархии методов мажорирования любых арифметических суждений посредством суждений вида S^*. Разумеется, не для любого арифметического суждения или его отрицания в этих иерархиях найдется мажоранта, истинная в 'приемлемой' частной финитарной семантике. Но некоторый подход к возможным экстраполяциям на 'широкий' арифметический язык представлений об истинных суждениях возникает.

Это расширяет наши представления о свойствах используемых в конструктивной математике языков и логических аппаратов, но, вообще говоря, немного дает при поисках 'интересных по содержанию' финитарных вариантов теорем конструктивной математики. Дело в том, что общие методы мажорирования, которые выше имелись в виду, предполагают предварительное приведение исходного суждения к некоторой специальной форме, не содержащей вхождений импликации и в целом деформирующей 'до неузнаваемости' исходное суждение.

Однако во многих случаях на основе конкретных соображений удается строить финитарные мажоранты, 'сравнительно близкие' по логической структуре к исходным суждениям и истинные в некоторой частной семантике, расположенной в 'начальной части' иерархии частных семантик (например, в ПРА). Продуктивные в этом отношении специальные методы мажорирования варьируются от случая к случаю (можно сказать, что формируется некоторая библиотека специальных методов мажорирования), и обнаруживается, что некоторые теоремы финитарной математики целесообразно формулировать в форме подходящих теорем 'широкой' конструктивной математики, дополняемых указанием определенного специального метода мажорирования. При фиксации специального метода мажорирования некоторые теоремы 'широкой' конструктивной математики способны играть роль удобных формулировок определенных теорем финитарной математики. При этом некоторые фрагменты аппарата логического вывода 'широкой' конструктивной математики оказываются (быть может, при подходящих ограничениях) допустимыми с точки зрения такого понимания роли упомянутых теорем.

5.2. Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим два примера. Для суждения (∗∗∗∗) в роли 'интересной по содержанию' финитарной мажоранты может фигурировать (например) формула

$$\exists h \forall x \forall z (\forall y_{\leqslant h(x,z)} (\varphi(x,y) = 0) \to (\psi(x,z) = 0)),$$

а также формула

$$\exists h^{'} \forall x \forall z (\varphi(x, h^{'}(x,z) = 0) \to (\psi(x,z) = 0)),$$

где h и $h^{'}$ – переменные для 2-местных ПРФ, а x, y, z – переменные для натуральных чисел.

В работах Гудстейна по рекурсивному МА встречаются теоремы, приводимые к виду (∗ ∗ ∗∗) и к более сложным видам, однако он не уточняет использованные им (фактически интуитивно) типы умозаключений, неизбежно выходящие за рамки ПРА (прежде всего - ввиду логической формы суждений, фигурирующих в его рассуждениях). Анализ 'логической ситуации' в этих работах можно найти в [Shan 1970]. Выясняется, что в ряде случаев Гудстейн фактически обосновывает некоторые 'интересные по содержанию' мажоранты суждений, являющихся теоремами конструктивного в 'широком' смысле МА.

В качестве второго примера рассмотрим в рамках классической математики следующее суждение: "Каждая монотонная вниз ПРФ имеет точку стабилизации". На логико-арифметическом языке оно имеет вид:

$$\forall f (\forall m (f(m+1) \leqslant f(m)) \to \exists n \forall k (k \geqslant n \to f(k) = f(n))),$$

где f – переменная для 1-местных ПРФ, $\exists$ – 'классический' квантор существования (см. разд. 2.3), а m, n, k – переменные для натуральных чисел.

Это суждение имеет значительно более сложную логическую структуру, чем (∗ ∗ ∗∗). Однако из 'естественного' рассуждения, посредством которого обосновывается эта теорема классической математики, можно 'извлечь' интересную по своему 'наглядному смыслу' и имеющую финитарное обоснование мажоранту рассматриваемого утверждения (см. [Shan 1982, 1983]).

Дополнения

Дополнение 1. В истории формирования 'облика' математики первостепенную роль сыграла и иная линия развития базисных представлений, не опиравшаяся (непосредственно) на анализ тех или иных представлений 'о бесконечности', – линия,имевшая своим результатом оформление в качестве самостоятельной математической идеологии *аксиоматического метода* построения математических теорий, ведущего свое происхождение от "Начал" Евклида. Эта линия отчетливо 'прочерчивается' следующими фрагментами книги [Bourb 1960] (глава "Основания математики. Логика. Теория множеств"):

"Математики всегда были уверены, что они доказывают 'истины' или 'истинные высказывания'. ⟨...⟩ Традиционное понятие математической истины восходит к эпохе Возрождения. При этой концепции не было большого различия между объектами, с которыми имеет дело математик, и объектами, изучаемыми естественными науками. И те и другие считались познаваемыми, человек овладевает ими посредством интуиции и рассуждения. ⟨...⟩ Со времен античности и до XIX в. существовало полное единодушие относительно объектов, которые являются основными для математиков;⟨...⟩ это суть числа, величины и фигуры.⟨...⟩ Как бы ни отличались по своим оттенкам различные философские концепции математических объектов у различных математиков и философов, в одном пункте по крайней мере они сходятся, а именно, что эти объекты нам *даны* и что не в нашей власти придать им произвольные свойства, как не властен физик изменить какой-нибудь закон природы. ⟨...⟩ Первый удар по классическим концепциям был нанесен в начале века Гауссом, Лобачевским и Бойаи построением неевклидовой гиперболической геометрии. ⟨...⟩ Гаусс и Лобачевский полагают,что спор между различными возможными геометриями может быть разрешен опытным путем. ⟨...⟩ На этой же точке зрения стоит и Риман ⟨...⟩. Но эта проблема уже явно не относится к математике. И, кажется, никто из упомянутых авторов не подвергает сомнению то, что, даже если какая-нибудь 'геометрия' и не соответствует экспериментальным данным, ее теоремы тем не менее остаются 'математическими истинами'. ⟨...⟩ математики начинают наконец отчетливо сознавать,что ⟨...⟩ в математике вполне законно рассуждать об объектах, не имеющих никакой чувственной 'интерпретации'.

⟨...⟩ С этого момента более широкое применение аксиоматического метода становится общепризнанным фактом. ⟨...⟩ Другими словами, математика по своей сущности ⟨...⟩ представляется теперь учением об отношениях между объектами,о которых ничего не известно кроме некоторых описывающих их свойств, именно тех, которые в качестве аксиом положены в основание теории".

Мысль, выраженную последней фразой, Г. Кантор 'заостряет' в виде следующего тезиса: "...математика совершенно независима в своем развитии и ее понятия связаны только требованиями быть непротиворечивыми и соответствовать понятиям, введенным ранее посредством точных определений" [Cant 1895]. В связи с этим тезисом уместно вспомнить 'корректирующий' его тезис Г. Вейля: "Построения математического ума являются одновременно и свободными, и необходимыми. Отдельный математик чувствует, что он свободен определять свои понятия и устанавливать свои аксиомы как ему угодно. Но вопрос: заинтересует ли он своих коллег-математиков продуктами своего воображения? Мы не можем не чувствовать, что некоторые математические структуры, развившиеся благодаря совместным усилиям многих ученых, несут печать необходимости, которая не затрагивается случайностями их исторического появления." [Weyl 1951]

Аксиоматический метод построения математических теорий в его современном виде предусматривает описание конкретной теории в виде формально-дедуктивной системы (это понятие является частным случаем 'чисто знакового' понятия *исчисления*), предусматривает постановку задачи об обосновании непротиворечивости рассматриваемой формально-дедуктивной системы, но (вообще говоря) не предусматривает изложения каких-либо мотивировок, касающихся выбора специфических аксиом и правил логического вывода, включаемых в описание рассматриваемой теории.

Расширение рамок использования в математике аксиоматического метода сопровождалось 'вытеснением' понятия "истинное суждение" понятием "суждение, выводимое из таких-то исходных суждений по таким-то правилам вывода". Такое 'освобождение' от трудных вопросов семантического характера делало аксиоматический метод привлекательным средством достижения своеобразной 'отчетливости'. Последняя достигается ценой исключения из ‘поля зрения’ представлений, связывающих (вообще говоря, с использованием экстраполяций и идеализаций) суждения применяемого в данной теории языка с экспериментальными данными, касающимися того или иного фрагмента природы, или с гипотезами об ожидаемых в определенных ситуациях результатах экспериментов.

Однако в реальной ‘математической жизни’ интерес обычно концентрируется на таких аксиоматических теориях, определение которых сопровождается некоторой мотивировкой. Особенно ценится (во всяком случае – с точки зрения применений математики) ‘очерчивание’ хотя бы одной ‘реализации’ теории в форме представлений только-что упомянутого типа – представлений, имеющих характер ‘прослеживания’ процесса формирования данной аксиоматической теории при моделировании реальных ситуаций того или иного рода с использовании таких-то (желательно, ‘осторожных’ или по крайней мере ‘не слишком фантастичных’) экстраполяций и идеализаций.

‘Внутри’ математики иногда предлагаются мотивировки, имеющие характер интерпретации рассматриваемой аксиоматической теории в некоторой другой аксиоматической теории, для которой уже предложена приемлемая с некоторой точки зрения мотивировка. Иногда на этом пути удается найти интерпретацию в рамках теории конечных множеств, иногда – в рамках финитарной математики, и это фактически означает формулирование мотивировки первого из упомянутых выше типов.

Однако интерпретации (и последовательности интерпретаций) одних аксиоматических теорий в других обычно (если иметь в виду фактически рассматриваемые в современной математике аксиоматические теории) ‘упираются’ (непосредственно или опосредованно) в канторову теорию *бесконечных* множеств или в ‘обширные’ фрагменты этой теории (например, благодаря использованию аппарата логического вывода классической логики, мотивировка приемлемости которого использует представления о ‘завершенной бесконечности’).

Таким образом, ‘отчетливость’, достигаемая в результате представления математических теорий в аксиоматической форме, обычно имеет, так сказать, технический характер. Аксиоматический способ формулирования математической теории создает благоприятные предпосылки для разработки различных технических аспектов этой теории (и это делает аксиоматический метод весьма ценным инструментом развития математики). Но аксиоматическая теория, не сопровождаемая мотивировкой, фактически представляет собой (с точки зрения исследователя природы) комплекс гипотетических представлений 'про запас', 'на всякий случай'.

История науки знает ряд случаев, когда 'немотивированные' аксиоматические теории оказывались востребованными в роли подходящих теоретических моделей некоторых реальных ситуаций. Особенно яркий пример - неевклидовы геометрии. Однако как евклидова геометрия, так и традиционные неевклидовы геометрии (изложенные, например, в виде подходящих 'аналитических геометрий'), фактически 'незначительно' зависят от КТМ: посредством 'небольшого' варьирования они могут быть преобразованы в теории финитарной математики.

Дополнение 2. Кантор поясняет смысл, вкладываемый им в слово "множество" следующим образом: "Под *множеством* мы понимаем любое объединение в единое целое определенных хорошо различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли" [Cant 1895]. Эти пояснения апеллируют лишь к 'миру представлений' и совершенно не предусматривают ни 'непосредственного' сопоставления представлений о "бесконечных совокупностях одновременно существующих объектов" с теми или иными результатами 'экспериментального освоения' природы (на каком-либо уровне детализации и 'охвата' в пространстве-времени), ни 'прослеживания' характера экстраполяций и идеализаций, приводящих от тех или иных экспериментальных данных к представлениям такого рода. При таком подходе из комплекса сомнений и недоумений, обсуждавшихся мыслителями античной эпохи, остаются лишь вопросы, касающиеся парадоксов 'на уровне чистого мышления'.

'Наивная' теория множеств Кантора на начальных шагах своего развития преподнесла математикам и логикам 'сюрприз' в виде примеров утверждений, доказуемых в рамках теории одновременно со своими отрицаниями. Однако вскоре эта теория была 'скорректирована' несколькими способами (отличающимися друг от друга лишь деталями, имеющими по существу технический характер), и предложенные варианты были оформлены в виде аксиоматических теорий. Уже давно среди математиков преобладает убеждение в том, что эти аксиоматические теории не преподнесут ‘сюрприза’, подобного упомянутому.

Однако такое убеждение не в состоянии устранить ‘тяжелые’ вопросы совершенно иного характера - вопросы о приемлемости базисных представлений интуитивного характера, к которым фактически апеллирует человек, использующий теорию множеств при рассмотрении проблем, касающихся экспериментальных данных того или иного рода. Такое апеллирование не всегда обращает на себя внимание, так как обычно оно бывает опосредованным и происходит, например, при построении математической модели какой-либо реальной ситуации в терминах современной теории дифференциальных уравнений, или теории представлений групп, или теории случайных процессов и т.п.

Внимание к упомянутым вопросам варьировалось с течением времени. XX столетие принесло триумфальный успех теории множеств в том смысле, что практически все области математики, сформировавшиеся до середины столетия, ‘поддались’ изложению на языке этой теории, объединенном с современным аппаратом классической логики (правда, ‘поддались’ лишь в той мере, в какой в этих областях обходились без постановок задач, характерных для зарождавшегося конструктивного направления в математике). Более того, система представлений, предложенная КТМ, способствовала возникновению и интенсивному развитию некоторых новых областей математики (примером может служить теория функциональных пространств и операторов в них). Благодаря упорядочению системы понятий математического анализа, достигнутому на основе КТМ, были устранены некоторые недоразумения в арсенале использовавшихся формальных процедур (например, при оперировании с бесконечными рядами и несобственными интегралами), и у многих математиков сложилось мнение о том, что достигнуто достаточное разъяснение ‘смысла’ всех компонент этого арсенала. (Ведь любая математическая процедура интерпретируется как множество упорядоченных пар, члены которых в свою очередь – некоторые множества). А демонстрация “сверхчеловеческой силы формальных процедур” (см. разд. 1.2) воспринималась многими математиками как обоснование a posteriori приемлемости КТМ в целом и, в частности, *всех* используемых в КТМ абстракций. При такой точке зрения представляется несущественной даже постановка вопроса о характеристике и какой-либо оценке ‘уровня фантастичности’ абстракций, фигурирующих в интуитивной базе КТМ.

В то же время, Д. Гильберт, обсуждая в [Hilb 1926] вопрос о реализуемости ‘в мире экспериментальных данных’ базисных представлений КТМ на макро-, микро- и мегауровнях детализации и ‘охвата’ в пространстве-времени, резюмирует свой анализ следующим образом:

“Раньше мы уже выяснили, что какие бы опыты и наблюдения и какую бы отрасль науки мы ни рассматривали, нигде в действительности мы не находим бесконечности. Должны ли мысли о вещах быть столь непохожими на то, что происходит с вещами, должны ли они сами по себе идти другим путем, совершенно в стороне от действительности?”

Дополнение 3. В приложениях математики при рассмотрении задач упомянутого выше типа во многих случаях применяются теоретические модели, формируемые из того ‘строительного материала’, который предоставляет традиционный МА. А последний систематически использует абстрактные представления теории множеств – представления, часто весьма отдаленные от ‘конкретных информаций’. Конструктивное направление в математике создает предпосылки для поисков ‘чисто информационных’ моделей рассматриваемых фрагментов ‘мира экспериментальных данных’. Здесь имеются в виду теоретические модели, в которых подразумеваемые объекты (реальные или воображаемые) и связи между ними *индивидуально представлены* с удовлетворяющей нас детальностью и точностью посредством ‘конкретных информаций’ (последние рассматриваются ‘на фоне’ некоторого отношения равенства, выражающего их взаимозаменимость с определенной точки зрения). При этом предпочтительны такие модели, в которых ‘конкретные информации’ рассматриваются именно как знаковые конструкции *с достаточным учетом этой их особенности и без таких идеализаций, использования которых мы в состоянии избежать*, а также без ‘окружения’ их какими-либо ‘идеальными объектами’, *не имеющими индивидуальных заданий посредством знаковых конструкций.*

Дополнение 4. Ключевые идеи, касающиеся определения математических понятий в рамках ‘финитарной установки’, изложены в [Hilb & Bern 1934] следующим образом: “... в области элементарной арифметики и алгебры ориентировка на прямые содержательные рассуждения, осуществляемые без предположений аксиоматического характера, разработаны в наиболее чистом виде. Характерной особенностью этой точки зрения является то, что рассуждения здесь рассматриваются как *мысленные эксперименты* над предметами, которые предполагаются *конкретно заданными.* ⟨...⟩ В арифметике у нас имеется некоторый исходный объект и, кроме того, некоторая операция порождения. И то, и другое мы должны будем зафиксировать некоторым наглядным образом. ⟨...⟩ Мы возьмем в качестве исходного объекта цифру 1, а в качестве операции порождения - приписывание 1. Объекты, которые мы получим, отправляясь от цифры 1, в результате применения порождающей операции ⟨...⟩ являются результатами некоторых конкретных завершающихся *построений*".

Оказалось, что идея, заложенная в описанном выше конструктивном определении понятия положительного целого числа, допускает распространение (вообще говоря – в обобщенном виде) на многие понятия из различных областей математики. В результате была создана (в первую очередь – в работе [Post 1943]) обобщающая теория, называемая теорией *порождающих систем* (*производящих систем, порождающих грамматик*). На основе этой теории была предложена (с убедительной мотивировкой) 'стандартизация' (и тем самым уточнение) интуитивного понятия конструктивно определяемого объекта.

Дополнение 5. В монографии [Hilb & Bern 1934] Л. Кронекер упоминается как родоначальник 'финитарной установки' в математике. Он предлагал воспринимать понятие натурального числа как 'интуитивно ясное', и в то же время предлагал рассматривать как приемлемые в математике лишь такие понятия, которые в некотором смысле 'выразимы' через понятие натурального числа (возможно, что на современном математическом языке для пояснения 'выразимости', которая имелась в виду, подошло бы словосочетание "эффективная кодируемость подразумеваемых объектов натуральными числами"). Подходящими в этом отношении понятиями являются, например, понятия "целое число", "рациональное число", "полином с целыми коэффициентами", "квадратная матрица с рациональными элементами".

Кронекером был получен фундаментальный результат, который мог служить 'побудительным мотивом' для выдвижения такого рода программы: он 'эффективно построил' поле разложения полиномов с целыми коэффициентами на линейные множители, – построил, не апеллируя к общему понятию вещественного числа в какой-либо форме, т.е. установил, что понятие алгебраического числа в его традиционной форме заменимо понятием конструктивной математики, способным ‘играть те же роли’. Элементы этого поля – конструктивно определяемые объекты, сравнительно просто кодируемые натуральными числами (арифметические коды этих объектов алгорифмически распознаваемы среди всевозможных натуральных чисел) и рассматриваемые ‘на фоне’ определенного алгорифмически проверяемого отношения равенства. Этот результат играет принципиальную роль на современном этапе разработки финитарных вариантов разнообразных теорий классической математики, но сам по себе он совершенно недостаточен для решения возникающих здесь проблем. Он не мог обеспечить Кронекеру существенное продвижение к намеченной цели.

‘Более наглядное’, чем у Кронекера, конструктивное определение понятия “алгебраическое число” было предложено в [Corp 1946]. Вещественным алгебраическим числом называется любая тройка

$$r,\ s,\ P$$

(с конструктивно определяемыми членами r, s и P), в которой r и s – рациональные числа, такие, что $r \leqslant s$, и P – полином с целыми коэффициентами, такой, что для P в замкнутом промежутке $[r, s]$ выполняется алгорифмически проверяемый критерий существования и единственности корня, формулируемый в классической математике в качестве следствия теоремы Штурма о количестве корней полинома в заданном промежутке. Любая упорядоченная пара вещественных алгебраических чисел называется алгебраическим числом. Для определенных этим методом алгебраических чисел очевидным способом вводится алгорифмически проверяемое (разрешимое) отношение равенства, и все рассмотрения алгебраических чисел происходят ‘на фоне’ этого отношения равенства.

Дополнение 6. Термин “абстракция потенциальной осуществимости” ввел в математическую литературу А. А. Марков. Этот термин он фактически применяет в качестве наименования определенного частного случая использования в античной математике термина “потенциальная бесконечность” – того случая, когда рассматриваются осуществляемые человеком или механизмом дискретные в пространстве и времени процессы построения знакосочетаний посредством отчетливо охарактеризованных *правил построения* новых знакосочетаний (например, слов в заданном алфавите) из ранее построенных. Идеализация, связываемая им с этим термином, "...состоит в отвлечении от практических границ наших возможностей в пространстве, времени и материале при осуществлении слов" [Mark 1962]. В своей работе [Mark 1972] он замечает: "...наши возможности действительно ограничены, и нет оснований полагать, что обусловленные их ограниченностью препятствия всегда будут устранимы. Скорее наоборот, современные физика и космология как будто свидетельствуют о принципиальной неустранимости таких препятствий. ⟨...⟩ Абстракция потенциальной осуществимости, как и всякая абстракция, вносит туда, куда она привлекается, элемент фантастики. ⟨...⟩ Различие между 'классиками' и 'конструктивистами' состоит в том, что они привлекают разные абстракции, то есть фантазируют по-разному."

В этом тексте Марков не случайно упоминает о физике и космологии. Ведь фактически математик, переходя от опыта оперирования с практически осуществляемыми процессами порождения знакосочетаний к теоретическим представлениям об 'очень далеких шагах' процессов определенного типа и об их ожидаемых результатах, не только мысленно отвлекается от практических границ возможностей, но и использует ('не объявляя' об этом) 'целый букет' фантастических (вообще говоря) экстраполяций, касающихся представлений об 'очень больших' пространственных и временных протяженностях, об одновременном существовании 'очень удаленных' друг от друга букв уже 'построенного' слова, о топологических свойствах 'очень длинных' цепочек элементарных объектов (например, мы 'убеждаем себя', что при порождении слов не появятся самопересечения), и т.д., и т.п. По-видимому, психология математика, включающего в свой арсенал абстракцию потенциальной осуществимости, обычно формируется так, что упомянутый 'букет экстраполяций' привносится из некоторых разделов геометрии Евклида и класссической механики, позволяющих интуиции 'опираться' на подходящие теоремы о 'произвольно длинных прямоугольниках' и о сочетаниях таких фигур, имея в виду при этом ньютонианские представления об одновременности событий, о перемещениях фигур как твердых тел, и т.п.

Осознание ‘зыбкости’ такого рода экстраполяций при теоретических рассмоторениях ожидаемых результатов ‘очень длительных’ конструктивных процессов привело к разработке аппаратов, направленных (в случаях, когда конструкция имеет в качестве одного из исходных данных ‘произвольно выбранное’ натуральное число n) на верхнюю или нижнюю оценку сложности конструкции (в заданном смысле) посредством ‘оценивающих’ функций из некоторого набора функций, обычно включающего в себя линейные функции, полиномы, экспоненты, суперэкспоненты различных ступеней и т.п. Такие оценки дают возможность представлять себе ‘рамки применимости’ теоретических моделей, использующих рассматриваемые конструкции.

Принципиальная особенность конструктивной математики состоит в ‘опоре’ на представление о том, что ‘многие’ КОО - те, которые порождаются в результате ‘не очень длительных’ процессов - “...нам *даны* и что не в нашей власти придать им произвольные свойства, как не властен физик изменить какой-нибудь закон природы” (см. (**Доп1**)). (Разумеется, необходимо иметь в виду, что ‘элементарные’ знаки, из которых формируются КОО, воспринимаются как объекты, не детализируемые больше, чем необходимо для констатации их одинаковости). Иначе обстоит дело, например, в геометрии. Интуитивные представления даже о простейших геометрических объектах (о точках, прямолинейных отрезках и прямых линиях) дают поводы для обсуждения вопроса об ‘уровне фантастичности’ этих представлений и даже об альтернативах последним. В случае КОО лишь ‘очень длительные’ порождающие процессы и их ожидаемые результаты дают актуальные поводы этого рода. В этом смысле можно говорить о КОО как о ‘почти физических’ объектах.

Дополнение 7. Конструктивный квантор существования и конструктивная дизъюнкция вошли в математику в результате провозглашения Л. Э. Я. Брауэром точки зрения, согласно которой математика – это умственная деятельность, состоящая в создании мысленных конструкций и в анализе таких конструкций. Слову “конструкция” Брауэр придает широкий смысл, настолько широкий, что не только знакосочетания, характеризуемые как потенциально возможные результаты конструктивных процессов, осуществляемых шагами заданных типов, но и потенциально бесконечные процессы последовательного *свободного* выбора объектов такого рода, являются конструкциями в смысле Брауэра. В то же время, когда речь идет о конструктивно определяемых объектах 'в узком' смысле, например, о натуральных числах, Брауэр настаивал (в частности) на конструтивном понимании суждений о существовании натурального числа, удовлетворяющего заданному условию, (на этом же настаивал и Кронекер) и на конструктивном понимании дизъюнкции. Однако Брауэр и его последователи использовали язык, допускавший *всевозможные* сочетания конъюнкции, импликации, отрицания и квантора общности. Использование такого языка рассматривалось как интуитивно приемлемое (правда, без формулирования отчетливой семантики). Но в этом языке выразимы как 'классическая' дизъюнкция $\vee$, так и 'классический' квантор существования $\exists$. Это обстоятельство вынуждает ввести для конструктивной дизъюнкции и конструктивного квантора существования новые символы, например, $\vee^+$ и $\exists^+$.

Конструктивную дизъюнкцию $\vee^+$ можно рассcматривать как производную логическую связку, характеризуемую следующим определением:

$$(P \vee^+ Q) \stackrel{\text{def}}{=} \exists^+ n\ ((1 \leqslant n \leqslant 2)\ \&\ (n = 1 \to P)\ \&\ (n = 2 \to Q)),$$

где n – переменная для натуральных чисел, не имеющая свободных вхождений ни в P, ни в Q.

Дополнение 8. Финитарные варианты математических теорий (а в некоторых отношениях и варианты, конструктивные в широком смысле) представляют собой 'позитивное' продолжение критического анализа канторовой теории множеств – они предлагаются в качестве альтернатив вариантам, использующим теорию множеств. Такие альтернативы дают определенные ответы на вопрос: возможно ли построение математических теорий без использования теоретико-множественного 'способа мышления', и какие достоинства имеет такое построение? Исторический парадокс заключается в том, что Кантор был автором идеи, оказавшейся (в соединении с другими идеями) подходящим инструментом для создания альтернатив 'математическому мировоззрению', являющемуся его детищем.

Дополнение 9. Теорема Витали, утверждающая, что множество объектов этого типа τ образует в пространстве измеримых множеств конечной меры всюду плотное подмножество, дает возможность даже в рамках классической математики радикально упростить 'без потерь' теорию измеримых множеств. Ведь в этой теории равенство объектов теории определено так, что не имеет смысла говорить о 'составленности' множества из отдельных точек, и обычно используемое определение понятия "измеримое множество" посредством 'вписывания' всевозможных замкнутых множеств и 'описывания' всевозможных открытых фактически лишено смысла.

Дополнение 10. Если рассматривается финитарное пространство равномерно непрерывно дифференцируемых в $[a, b]$ функций и в основу его определения положены полиномы с рациональными коэффициентами, то имеется возможность вместо интервальной функции Ω_1 использовать 'более грубые', но 'легче вычислимые' интервальные функции, например, следующую функцию $\Omega_1^{\sim}$:

$$\Omega_1^{\sim}(f, [r, s], n) \stackrel{\text{def}}{=} \left[f\left(\frac{r+s}{2}\right) - c_n \cdot \frac{s-r}{2}, \quad f\left(\frac{r+s}{2}\right) + c_n \cdot \frac{s-r}{2} \right];$$

здесь

$$c_n = \langle \max_{[a,b]} |D(f)| \rangle^{n+}.$$

Литература

[Alex] Alexandroff P.S.

1929. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension.// Ann. of Math., v.30, p. 101–187.

[Bish] Bishop E.

1967. Foundations of constructive analysis.// New York.

[Bourb] Bourbaki N.

1960. Eléments d'histoire des mathématiques.// Paris, Hermann.

[Cant] Cantor G.

1895. Beträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. // Math. Annalen, Bd.46, S. 481-512..

[Chu] Church A..

1957. Binary recursive arithmetic. // Journ. mathém. pures et appl. Ser. 9, v. 36, no. 1, 39-55.

[Corp] Corput J. G. van der.

1946. On the fundamental theorem of algebra. I. // Indagat. Math., v. 8, p. 430–440.

[Cour & Robb] Courant R., Robbins H.

1941. What is Mathematics? // Oxford Univ. Press.

[Curry] Curry H. B.

1941. A formalization of recursive arithmetic.// Amer. Journ. Math., v.63, p. 263–282.

[Dants] Dantsin E. Ya. (Данцин Е. Я.).

1976.Об аппроксимативном варианте понятия аналитической функции. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, т.60, с. 49–58.

[PDD] Phan Dinh Dieu (Фан Динь Зиеу).

1967. Конструктивные обобщенные функциии. // ДАН СССР, т.174, Но 1, ц. 37–40.

1970. Некоторые вопросы конструктивного функционального анализа. // Труды МИАН СССР, т.114, Москва, "Наука".

[Good] Goodstein R. L..

1945. Function theory in an axiom-free equation calculus. // Proc. London Math. Soc., ser.2, v.48, p. 401–431.

1956. A constructivist theory of plane curves. // Fundam. Math., v.43, No 1, p. 23–35.

1957. Recursive number theory. // North-Holl., Amsterdam.

1961. Recursive analysis.// North-Holl., Amsterdam.

[Gunt] Günter N. M. (Гюнтер Н. М.).

1940. О постановке некоторых задач математической физики.// Ленингр. Гос. Универс., Ученые записки, сер. математ. наук, вып. 10, с. 12–26.

[Heyt] Heyting A.

1934. Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheori.//Ergeb. Mathem. und Grenzgeb., Bd.3, No 4. Berlin.

[Hilb] Hilbert D.

1926. Über das Unendliche.// Mathem. Ann., Bd.95, p. 161–190.

[Hilb & Bern] Hilbert D., Bernays P.

1934. Grundlagen der Mathematik.I.// Springer, Berlin.

[Korev] Korevaar J.

1955. Distributions defined from the point of view of applied mathematics.// Indagat. Mathem., v.17, No 3, p. 368–389.

[Lif] Lifshits V. A. (Лифшиц В.А.).

1971. Об исследовании конструктивных функций методом заполнений. //Зап. научн. семин. ЛОМИ, т.20, с. 67–79.

[Mark] Markov A. A. (Марков А. А.).

1958. О конструктивных функциях.// Труды МИАН, т.52, с. 315–348.

1962. О конструктивной математике.// Труды МИАН, т.67, с. 8–14.

1972. О логике конструктивной математики.// Изд."Знание". Москва.

[Mi & Si] Mikusinski J., Sikorski R.

1957. The elementary theory of distributions.I.// Warszawa.

1961. The elementary theory of distributions.II.// Warszawa.

[Mints] Mints G. E. (Минц Г. Е.).

1964. О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики.// Труды МИАН, т.72, с. 383–436.

1967. Исправления и дополнения к статье “О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики”.// Труды МИАН, т. 93, с. 257–258.

[Post] Post E. L.

1943. Formal reductions of the general combinatorial decision problem.// Amer. Jour. Math., v. 65, p. 197–215.

[Rose] Rose H. E.

1984. Subrecursion. Functions and hierarchies.// Clarendon Press, Oxford.

[Shan] Shanin N. A. (Šanin N.A., Шанин Н. А.).

1956. Некоторые вопросы математического анализа в свете конструктивной логики.// Zeitschr. Math. Logic Grundl. Mathem., Bd.2, S. 27–36. (German summary).

1959. О линейных конструктивных функционалах в конструктивном гильбертовом пространстве.// Zeitschr. Math. Logic Grundl. Mathem., Bd. 5, S. 1–8. (German summary).

1962. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.// Труды МИАН, т. 67, с. 15–294.

1968. Constructive real numbers and function spaces.// Transl. Mathem. Monogr., vol.21, Amer. Math. Soc.

1970. О рекурсивном математическом анализе и исчислении равенств Р. Л. Гудстейна.// В книге: Р. Л. Гудстейн “Рекурсивный математический анализ”, Москва, “Наука”, 7–76.

1973. Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике.// Труды МИАН, т. 129, с. 203–266. (Существенные исправления см. в [Shan 1981; Bibliogr.]).

1976. О кванторе предельной осуществимости.// Зап.научн.семин. ЛОМИ, т. 60, с. 209–220.

1979. О канонических рекурсивных функциях и операциях.// Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 88, с. 218–235.

1981. Role of the notion of algorithm in arithmetic language semantic.// Lect. Notes Comput. Sci., v. 122, p. 361–389 (Текст на русском языке см. в сборн.: Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. Часть II. Новосибирск, 1982 г., стр. 147–180).

1982. О мажорировании теорем конструктивной математики семантически простыми утверждениями.// ICM. Short communications (Abstracts).1. Section Mathem. logic and foundations of mathematics. Warszawa. p. 21.

1983. Об ‘алгоритмическом подтексте’ теорем с классическим квантором существования.// Третья конференция “Применения методов математической логики”. Тезисы докладов. с. 115–116. Таллин.

1984. О финитизации математического анализа.// 7 Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докладов. Новосибирск, с. 198–199.

1987. On finitary development of mathematical analysis on the base of Euler's notion of function.// 8 Intern. Congr. of Logic, Methodol. and Philos. of Science. Moscow. Abstracts, v. 1, p. 60–63.

1988. Финитарный вариант понятия обобщенной функции.// 9 Всесоюзная конференция по математ. логике. Тезисы докладов. Ленинград, с. 179.

1995. Георг Кантор как автор конструкций, играющих фундаментальные роли в конструктивной математике.// Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 220, с. 5–22.

1998. О процедурном подходе к разъяснению смысла суждений.// Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы 5 Общероссийской научной конференции. С.-Петербург, с. 415–421.

[Skol] Skolem T.

1923. Begrundung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich.// Videnskapsselskapets skrifter, I. Matem.-naturvid. klasse. No. 6.

[Tsey] Tseytin G.S. (Цейтин Г. С.).

1962a. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах.// Труды МИАН, т. 67, с. 295–361.

1962b. Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе.// Труды МИАН, т. 67, с. 362–384.

[Weyl] Weyl H.

1918. Das Kontinuum.// Leipzig.

1926. Die heutige Erkenntnisslage in der Mathematik.// Sympos. 1925, I.

1951. A half- century of mathematics.// Amer. Math. Month., v. 58, p. 523–553.

[Zasl] Zaslavskiy I. D. (Заславский И. Д.).

1962. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций.// Труды МИАН, т. 67, с. 385–457.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже воспроизводится (с исправлением опечаток) текст, опубликованный в сборнике: “Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке”. Материалы пятой Общероссийской научной конференции. С.-Петербург (1998), 415–421.

Н. А. Шанин

О процедурном подходе к разъяснению смысла суждений

1. В процессе ‘стихийного’ овладения конкретным человеком тем или иным естественным (‘разговорным’) языком на интуитивном уровне формируются, в частности, какие-то представления об ‘осмысленных’ языковых конструкциях и о ‘смысле’ таких конструкций.Инициатором экспликации интуитивных представлений этого рода был Г. Фреге. Он приводит разнообразные примеры языковых выражений, для которых ‘интуитивно определимы’ (в принципе) их *значения*, и констатирует некоторые трудности в проблеме экспликации, возникающие при рассмотрении того или иного естественного языка ‘в целом’.

Предложенные Фреге формулировки на эту тему являлись и являются объектами дискуссий. Этот доклад посвящен обсуждению проблемы с точки зрения выработанных в физике и других областях естествознания представлений о базисной роли *процедурных* (*операциональных*) разъяснений понятий, отношений и суждений.

2. Ввиду чрезвычайного разнообразия ситуаций и целей, применительно к которым люди используют естественные (а также целенаправленно ‘изобретенные’) языки, и ввиду разнохарактерности трудностей, обнаруживающихся при поисках желаемых уточнений для естественного языка, рассматриваемого ‘в целом’ (в частности, для таких фрагментов языка, в которых происходит апеллирование к ‘далеко идущим’ идеализациям), целесообразно при рассмотрении проблемы разъяснения языковых конструкций упомянутого рода выделить ситуации некоторых ‘простых’ типов - ситуации, при которых эта проблема перестает быть ‘необъятной’ и допускает достаточно отчетливые экспликации, создающие некоторую базу для рассмотрения той же проблемы во все более и более сложных ситуациях.

Однако даже для ситуаций 'весьма простых' типов (а нижее только о них будет идти речь) формулирование достаточно отчетливых разъяснений связано с выбором некоторых *базисных представлений принципиального характера*. Обсуждение последних составляет основное содержание этого сообщения.

3. Фундаментальное продвижением в проблеме, о которой здесь идет речь, было подготовлено изобретением в конце XIX и начале XX столетий для 'сравнительно обширных' фрагментов естественных языков таких моделей, которые, абстрагируясь от весьма многих черт естественных языков и представляя собой 'искусственные' языки с отчетливо определенными и сравнительно простыми синтаксисами, делали вполне обозримыми 'смысловые аспекты' языковых конструкций (особенно при использовании деревьев синтаксического разбора). Здесь в первую очередь имеются в виду логико-предметные языки типа языка исчисления предикатов 1-й ступени (вообще говоря,с предметными константами и предметными переменными нескольких родов и с константами как для конкретных предикатов, так и для конкретных предметных функций).

Ограничимся рассмотрением именно таких 'модельных' языков. Для них интуитивные представления об 'осмысленных' языковых выражениях в современной логической литературе эксплицируются посредством понятий "предметный терм", "замкнутый предметный терм", "формула" и "замкнутая формула" (*суждение*). Для случаев этого типа и в предположении, что для предметных переменных каждого рода в каком-то смысле 'задана' область их допустимых значений, и все предикатные (функциональные) константы обозначают конкретные предикаты (предметные функции), в каком-то смысле 'заданные' при всех наборах индивидуальных констант,предусмотренных типами рассматриваемых предикатов (предметных функций), концепция, предложенная Фреге, конкретизируется следующим образом: каждый замкнутый предметный терм предлагается рассматривать как составное (вообще говоря) имя того объекта, который является значением данного терма (и представляет собой константу определенного рода), а любое суждение – как составное имя одной из двух булевых констант И, Л, играющих роль сокращенных записей специфических 'сигнальных слов' *истина, ложь* (или, в 'бытовом' варианте, – роль обозначений слов *да, нет*). При этом, под *смыслом* рассматриваемой языковой конструкции Фреге предлагает понимать "*то, что отражает способ представления объекта, обозначаемого данным знаком*".

Однако восприятие процессов формулирования (и обоснования) законов природы или 'интересных по содержанию' математических теорем как деятельности, направленной на получение разнообразных (часто весьма 'изощрённых') представлений 'сигнала' *истина*, никак не согласуется с обычным пониманием участниками таких процессов своей деятельности как части процесса познания реальных объектов и явлений.

4. В современных учебниках логики в качестве экспликации представлений о значениях замкнутых предметных термов и замкнутых формул (суждений) предлагаются определения *рекурсией по шагам процессов порождения* предметных термов и формул. В случаях, когда среди подразумеваемых предметных областей допускаются не только конечные области, такие рекурсивные определения вызывают 'тяжелые' вопросы, связанные с использованием при разъяснениях кванторов общности и существования 'далеко идущих' идеализаций.

Ввиду этого 'базу' для экспликаций имеет смысл искать в таких ситуациях, которые складываются при мысленном выделении *на макроскопическом уровне* детализации и 'охвата' в пространстве-времени того или иного фрагмента 'мира экспериментальных данных', состоящего из конечного набора конечных множеств (называемых обычно *предметными областями*), каждое из которых состоит из чувственно воспринимаемых и 'практически неизменных' (на протяжении интересующего нас промежутка времени и в интересующих нас отношениях) объектов. При этом предполагается, что выделенный набор предметных областей 'осваивается' посредство конечного набора материальных, или мысленных, или смешанных потенциально выполнимых (и охарактеризованных 'практически отчётливо') *процедур*, оставляющих 'практически неизменными' объекты, к которым они применяются, и имеющих своими результатами при применении к допустимым (т.е. согласованным с типом процедуры) исходным данным в одних случаях - один из 'сигналов' И, Л (в этих случаях говорят, что процедура определяет *предикат*), а в других случаях – конкретный элемент одной из предметных областей (в этих случаях процедура определяет *предметную операцию* или *предметную функцию*).

Назовём ситуации этого типа *вполне финитарными*.

5. При вполне финитарных ситуациях имеется возможность формировать многошаговые процедуры, 'составляемые' в том или ином смысле из 'базисных' процедур. С этой целью используют, в частности, предметные термы и формулы. Конкретный замкнутый предметный терм (конкретное суждение) может играть роль зашифрованного описания процесса выполнения при заданном наборе предметных констант определённой (вообще говоря, многошаговой) процедуры (результат процесса называют *значением* рассматриваемого выражения), и именно осуществления (часто не осознаваемые) таких *процессов* фактически формируют интуитивные представления, связываемые обычно с термином *смысл замкнутого предметного терма* (соответственно, *смысл суждения*).

Такая экспликация принципиально отличается от предложенной Фреге, ибо акцент делается не на объекте, являющемся значением языкового выражения (и оказывающемся в 'поле зрения' лишь после завершения процесса), а на определённой *деятельности*, в которой фигурируют рассматриваемые предметные области и 'базисные' процедуры. (Повидимому, Фреге было чуждо истолкование языковых выражений, даже в реальных ситуациях, в терминах, касающихся каких-либо процессов и человеческой деятельности).

Часто формулируемые в логической литературе рекурсивные определения значений языковых выражений 'намекают' на способ развертывания подразумеваемых процессов, но в то же время они 'затушевывают' возможное непосредственное описание. Непосредственно и в наглядной форме процедура описывается в виде процесса последовательного продвижения по дереву синтаксического разбора от 'листьев' дерева к его 'корню' с выполнением очередных 'базисных' процедур (или, при использовании 'строчной' записи языковых выражений, – в виде процесса, слагающегося из выявления внутри текста всех выражений, символизирующих однократное применение той или иной 'базисной' процедуры или пропозициональной функции к синтаксически допустимому набору констант, получения значений таких выражений, подстановки последних вместо самих выражений, применения к полученному выражению таких же шагов, и т.д.). Здесь предполагается, что предварительно все вхождения в исходное выражение кванторов общности и существования 'переведены' стандартным способом (продвижением 'изнутри' выражения) в семантически равнозначные конечные конъюнкции и (соответственно) конечные дизъюнкции.

6. При вполне финитарных ситуациях распространенным способом выражения некоторых знаний о тех или иных введенных в рассмотрение объектах и процедурах является следующий *процедурный* способ: описывается некоторая, вообще говоря, многошаговая процедура, 'составляемая' в том или ином смысле из исходных процедур и сформулированная применительно к выбранному набору предметных констант; это описание дополняется сообщением об ожидаемом результате.

В практике языкового выражения конкретных знаний сформировался определенный *стандартный ожидаемый результат* (вообще говоря, не произносимый, но *подразумеваемый* при сообщении собеседнику конкретного знания *с утвердительной интонацией*) - это сигнал "*да*" (в некоторых контекстах – сигнал "*истина*"). Суждения – это языковые конструкции, приспособленные именно к такому способу сообщения знаний.

Человек, формулирующий *с утвердительной интонацией* какое-либо суждение в качестве своего знания об объектах из рассматриваемых предметных областей и о некоторых 'базисных' процедурах, фактически имеет в виду следующее: *я описываю в зашифрованном виде определенный эксперимент, и его ожидаемым результатом является сигнал "да"* (варианты: сигнал "*истина*", сигнал "*И*").

Иногда ожидаемые результаты описываются в иных формах. Однако последние в практике языкового общения обычно сводят к 'стандарту' с помощью подходящих способов (в некоторых случаях - с помощью отношений равенства в рассматриваемых предметных областях).

В практике языкового общения людей иногда то или иное конкретное суждение (формулируемое применительно к вполне финитарной ситуации) называют *истинным суждением* (*верным суждением*), имея в виду, например, такое разъяснение: *Сужде-*

ние называют истинным (верным), если оно описывает (отражает) то, что имеет место в действительности. Однако это разъяснение само нуждается в каком-то ‘процедурном’ объяснении. Повидимому, интуитивная основа использования термина *истинное суждение* такова, что применяя его *фактически* имеют в виду следующее: результат эксперимента, ‘описываемого’ этим суждением, представляет собой сигнал “*да*”. Однако это разъяснение не всегда осознается в качестве ‘базисного’. Возможно, именнно в этом лежат корни предложенной А. Тарским *концепции истинности*, не совместимой с очерченными выше семантическими представлениями ‘процедурного характера’.

7. При выходе за рамки вполне финитарных ситуаций экспликации, о которых идет речь, осуществляются посредством *экстраполяций* (во многих случаях ‘весьма идеализированных’) упомянутых выше *представлений о процедурах*, связываемых с замкнутыми термами и суждениями, посредством формирования некоторых представлений воображения, дополняемых (в языке) подходящими, выражающими эти представления, суждениями. Последние рассматриваются (при тех или иных мотивировках) как допустимые исходные данные для процессов логического вывода. Например, так обстоит дело, когда некоторые из включенных в рассмотрение объектов не поддаются чувственному восприятию (например, ядро планеты Земля, собственный гипоталамус и т.п.), но на основе уже сложившейся ‘картины мира’ или некоторых гипотез человек формирует представления о ‘естественных’ экстраполяциях некоторых, осуществимых лишь в иных условиях, процедур. Во многих случаях экстраполяции имеют в своей основе ‘картину’, формируемую воображением в предположении, что мысленно устранены реальные препятствия к выполнению тех или иных действий, направленных на ‘экспериментальное освоение’ объектов (здесь по существу используется форма *сослагательного наклонения*). В этих экстраполяциях ‘уязвимым звеном’ во многих случаях оказывается мотивировка приемлемости используемых средств логического вывода - ведь последние соответствуют своему назначению лишь тогда, когда при применениях этих средств возникают лишь истинные ‘в экстраполированном смысле’ суждения.

Аналогично и в то же время своеобразно (ввиду центральной роли ‘угадывания’ исходных данных для процессов логического вывода) производится экстраполяция представлений о процедурах в случаях, когда формируются представления о ранее существовавших или ожидаемых в будущем ситуациях 'вполне финитарного типа'.

Многие ситуации из разнообразных областей человеческой деятельности допускают 'практически приемлемое' моделирование посредством подходящих вполне финитарных ситуаций или более сложных ситуаций, но не апеллирующих к тому или иному варианту представлений 'о бесконечности'. В то же время, радикально усложняется (в соответствии с современными представлениями физики и космологии) характер экстраполяций при формировании представлений воображения, касающихся ситуаций в микромире или мегамире (дело доходит до отказа от 'прямых' экстраполяций и перехода к существенно иным принципам моделирования подразумеваемых ситуаций). Радикально усложняется также проблема экстраполяции представлений 'процедурного' характера при использовании того или иного варианта представлений 'о бесконечности'. При использовании представлений этого рода (в частности, в математике) возникает усложняющаяся в соответствии с характером используемых идеализаций *иерархия* экстраполяций, и лишь для 'начальных этажей' этой иерархии (например, для 'этажа', занимаемого *финитарной математикой*) удается предложить 'сравнительно наглядные' экстраполяции представлений, о которых выше шла речь. (В конкретных областях финитарной математики изучаемыми объектами являются знакосочетания и тотальные алгорифмы некоторых синтаксически охарактеризованных типов, и рассматриваются лишь такие суждения, которые "сводимы по смыслу" к бескванторным суждениям или к суждениям, представимым в виде замыкания бескванторной формулы кванторами общности, связывающими все входящие в формулу переменные.)