Вильсона. Для случая одноместного предиката " q – простое число" предлагаемые критерии, по-видимому, не дают никаких преимуществ, однако в случае многоместного предиката " $q_1, \dots, q_k$ – простые числа" при большом k и предиката " q – простое число Ферма" эти критерии позволяют строить диофантовы представления с меньшим числом переменных (в случае простых чисел Мерсенна удобнее использовать критерий Люка).

Укажем другую потенциальную область приложения критериев рассматриваемого типа. Согласно известной теореме Лагранжа диофантово уравнение

$$q-((w-1)^2-(x-1)^2-(y-1)^2-(z-1)^2)=0 \tag{II}$$

разрешимо при любом натуральном q. Используя описанную в настоящей работе технику, можно, исходя из уравнения (II), построить полином M'''' и дробно-экспоненциально-полиномиальные функции B'''' и D'''' такие, что разрешимость (II) эквивалентна условию

$$p^{M''''(n)} \;\Big|\; \binom{B''''(n,p)}{D''''(n,p)q} \tag{I2}$$

где p – простое, $n \geqslant q$. Из теоремы Лагранжа следует, что каково бы ни было простое число p, для любых n и q таких, что $q \leqslant n$, выполнено (I2), и, наоборот, если хотя бы при одном простом p условие (I2) выполнено для всех n, q таких, что $q \leqslant n$, то любое натуральное является суммой четырех квадратов.

Далее, из (I2) следует, что для любого

$$p^{M''''(n)} \;\Big|\; \sum_{q=1}^{n} \binom{B''''(n,p)}{D''''(n,p)q} \tag{I3}$$

Выполнимость (I3) для любого n также влечет теорему Лагранжа. Чтобы показать это, достаточно воспользоваться индукцией. Пусть по индукционному предположению числа I, 2, ... , $q-1$ являются суммами четырех квадратов, тогда по построению B'''', D'''' и M'''' первые $q-1$ слагаемых в сумме (I3) делятся на $p^{M''''(n)}$, значит, делится и последнее, и, следовательно, q также есть сумма четырех квадратов.

Функции B'''' и D'''' могут быть построены так, что

$$D''''(n,p)\,n < B''''(n,p) < D''''(n,p)(n+1). \tag{I4}$$